Begirada matematiko bat • Una mirada matemática

IMAGINARY

Gida Didaktikoa • Guía Didáctica

Alexander Aginagalde Nafarrate, Pedro Alegría Ezquerra,
Raúl Ibáñez Torres, Álvaro Lozano Rojo, Marta Macho Stadler

Aurkibidea • Índice

I. Koordenatu cartesiarrak edo nola zehaztu puntu baten kokapena espazioan
Coordenadas cartesianas o cómo determinar la posición de un punto en el espacio 5

II. Surfer programa ezagutzen
Conociendo el programa Surfer 11

III. Surfer, modelizazioa eta sormena
Surfer, modelización y creatividad 16

IV. Morenaments
Morenaments 18

V. Baldosadurak
Embaldosados 27

VI. Moebius-en banda ez da orientagarria
La banda de Moebius no es orientable 34

VII. Fraktalak eraikitzea paperarekin
Construcción de fractales con papel 37

Sarrera

Ezin da gizakia ondo ulertu Matematika eta Poesia sustrai beretik sortzen direla jakin gabe, irudimen-gaitasunetik, alegia.

José Ortega y Gasset

Poesiarako bezainbesteko beharrezkoa du-gu etorria Geometriarako.

Alexandr Sergeyevich Pushkin

Real Sociedad Matemática Española (RSME) delakoak mendeurrena ospatzen du 2011 urtean. Ospakizun horren helburuen artean matematikaren dibulgazioa dago, bai ikasleen artean bai publiko osorako ere. RSME-IMAGINARY erakusketak, informazio eta komunikazio teknologiez baliatuz, Matematika eta Artearen arteko lotura estua azpimarratu nahi du. Bisitaldian forma eta gainazalen arteko ibilaldi birtual eta interaktibo bat egin daiteke matematikak artearekin, diseinuarekin eta eguneroko tresnekin duen erlazio azpimarratuz.

Erakusketa Alemaniako “Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach” -ek garatutako, IMAGINARY, izen berekoaren moldaketa da eta nazioarteko matematikari eta artezaleen arteko lankidetzaren ondorioa da. Helburu nagusia irudikatutako errealitatea eta matematikako objektu abstraktuen bistaratze zehatzaren arteko topagune izatea litzateke. Irudimena kausa, matematika errealitatearen modelizazioaren bitartekoa eta arte- eta industria-sormenerako bultzatzaile izango da. Azken finean erakusketaren nahia matematikaren alderdi ikusgarri eta estetikoak aitzakia, berton ezkutatzen den matematika sakonaren azterketarako pizgarria izatea litzateke. Irudikagarria zein irudika ezina norberak sortutako irudiekin irakasten da.

Erakusketaren 1. edizioa 2007an Munichen izan zen eta geroztik, Alemaniako hiri gehienetan egon ondoren, Viena, Stanford, Berkeley, Cambridge,

Introducción

No hay modo de entender bien al hombre si no se repara en que la matemática brota de la misma raíz que la poesía, del don imaginativo.

José Ortega y Gasset

La inspiración es necesaria en geometría tanto como en poesía.

Alexandr Sergeyevich Pushkin

La Real Sociedad Matemática Española (RSME) celebra el centenario de su fundación durante el año 2011. Entre los objetivos de esta celebración se encuentra la divulgación de las Matemáticas para estudiantes y para el público en general. La exposición RSME-IMAGINARY se inscribe en esta visión y está enfocada a subrayar, usando tecnologías de informática y comunicaciones, la estrecha relación entre Matemáticas y Arte. La muestra invita a sus visitantes a realizar un paseo visual e interactivo por el mundo de las formas y de las superficies, mostrando la relación de las matemáticas con el arte, el diseño o las aplicaciones a nuestra vida cotidiana.

La exposición es una adaptación de la también llamada IMAGINARY, desarrollada por el “Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach” (Alemania), y es fruto de la participación internacional de matemáticos y artistas. Su leitmotiv es la imagen como lugar de encuentro entre la realidad imaginada y la visualización concreta de los objetos matemáticos abstractos. A través de la imaginación las matemáticas se convierten en una herramienta tanto para la modelización de la realidad, como para la creatividad artística, pero también la industrial. Finalmente, la idea subyacente a esta exposición es la utilización de componentes estéticos y visuales de las Matemáticas como estímulo para suscitar en los visitantes el interés por la matemática subyacente. Se ilustra lo imaginario e inimaginable de las Matemáticas, para lo que se recurre a imágenes que uno mismo puede crear.

Desde la primera edición en Munich en 2007 la exposición ha recorrido prácticamente todas las ciudades alemanas, y fuera de Alemania ha estado en

Kiev, Zurich, Mumbai, París,... bisitatu ditu. 2011 eta 2012 urteetan Espainiako 12 hiritan, ibiltari, ikusi ahal izango da. CosmoCaixak, gainera, Alcobendasen (Madril) 2011ren urtarriletik ekainera eta Bartzelonan, urte bereko uztailatik abendura, ikusgai izango den erakusketaren egokitzapena prestatu du.

Viena, Stanford, Berkeley, Cambridge, Kiev, Zurich, Mumbai, París,... Se ha reservado todo el año 2011 y buena parte de 2012 para su recorrido por 12 ciudades españolas. Además de la exposición itinerante, se ha preparado una versión diferente de Imaginary para las instalaciones de CosmoCaixa, para exponer de enero a junio de 2011 en Alcobendas (Madrid) y de julio a diciembre de 2011 en Barcelona.

RSME-IMAGINARY Bilbon 2011. urtean izateak euskal hiritarrei matematikaren ikuspegi erakargarri eta interesgarri erakutsiko die. Izan ere, erakusketa adin guztietakoentzat izan baitaiteke disfrutagarri: irudien erakargarritasuna dela, testu iradokitzaileen irakurketa dela, eskulturen edertasuna dela, matematikaren bistaratzea bideratzen duten programa interaktiboekin jolastu, ikasi edota ondo pasa dela: *Surfer*-ekin gainazal ederrak sortu ahal izango ditugu, *j-Reality*-rekin ingurune birtual batean gainazal horietan murgildu ahal izango gara edota *3D_XplorMath*-ekin 3Dtako objektu matematikoak erakutsiko dizkigun. Parte-hartze horretarako ez da nahitaezkoa izango aldez aurretiko ezagutza matematiko sakona, izan ere, programa interaktiboekin disfrutatzeko nahikoa izango baita irudimena askatzea eta forma eta irudien edertasunaz gozatzea.

Erakusketak helburu didaktiko argia du eta, horren ondorioz, gidaturiko eta monitorez laguntduriko bisitaldiak antolatuko dira DBH-ko eta Batxilergoko ikasleentzako, batetik, eta publiko osorako, bestetik, IMAGINARY erakusketari Bilbon ahalik eta etekin gehien atera dakioken.

La visita de la exposición RSME-IMAGINARY a Bilbao durante el mes de mayo de 2011 constituye una buena oportunidad para mostrar a la sociedad vasca una imagen atractiva, pero también interesante de las matemáticas. Cualquier persona, de prácticamente cualquier edad, puede acercarse a la exposición, disfrutar con sus bellas imágenes, leer sus sugerentes textos, apreciar la belleza de sus esculturas, jugar, aprender y divertirse con programas interactivos de visualización matemática, como el *Surfer* que permite crear bellas superficies, el *j-Reality* que nos introduce en ellas a través de un entorno de realidad virtual o el *3D_XplorMath* que nos muestra objetos matemáticos en visión 3D. Para ello no es necesario poseer un bagaje matemático previo, solamente dejar volar la imaginación a través de la interacción con los distintos programas de la exposición y disfrutar con la estética de la forma y la imagen.

Además, la exposición tiene de forma muy acusada una vocación didáctica. Se van a organizar visitas guiadas y monitorizadas de grupos de alumnos de ESO y Bachillerato, así como de público en general, con el objetivo de que aprovechen al máximo la oportunidad que brinda tener una exposición como **IMAGINARY** en Bilbao.

Gida didaktiko honen helburua RSME-IMAGINARY erakusketaren aukera didaktiko eta ludikoak areagotu eta denboran luzatzea litzateke. Bertan agertzen diren aukerak erakusketan ikusi ahal izango direnen zati bat baino ez dira. Aurreneko hiru jarduerak Surfer programaren erabilerak dira gainazal algebraikoen adierazpenerako eta norberaren sormenaren eta irudimenaren askapenerako aukerak, alegia. 4. jarduerak, Morenaments programaren bitartez, planoko 17 simetriak identifikatu eta

Así mismo, con el objetivo de crear una herramienta didáctica y lúdica relacionada con la exposición RSME-IMAGINARY, que además sea útil e interesante más allá del tiempo que esta se exhibe en Bilbao, se ha preparado esta guía didáctica. Las actividades que incluye son solamente una pequeña muestra del enorme potencial de la exposición y sus elementos. Las tres primeras actividades se enmarcan dentro del conocimiento del programa *Surfer*, y de las superficies algebraicas a través de este, así como diseinu artistikoetarako erabiltzea sustatu nahi du, Alhambrako lauzatuen dekoratuak esate baterako. “Embaldosados” jardueran berriz, lauzatuak landuz lurra poligono erregularreko formak dituzten lauzez estaltzeko modu desberdinetara inguratuko gara eta M. C. Escher-renzenbait artelan erabiliko ditu adibide motibagarritzat. Hurrengo jardueran, Moebius bandaren berezitasunekin jolastuko dugu, izan ere, gainazak leun ez-norabidatu bat baita, aurpegi bakarrekoa, alegia. Eta gidari amaiera emateko fraktal eder batzuk eraikiko dira paper-orriak erabiliz.

Gida honen hasierako helburua irakasleentzako erakargarria eta geletan erabilgarria izatea bada ere, izan ditzake beste zenbait erabilera ere, liburutegietan, irakaskuntza- zein denborapasa-tailerretan edota udako kanpamentuetan. Baina edozeinek, edozein prestakuntza badu ere, bere irakurketa propioa egin dezake, bakarrik edo lagunartean, eta bide horretan denek aurkitu dezakete jolasteko eta ikertzeko aitzakia. Ziur gaude, inor ez dela damutuko Matematika eta Artearen arteko bidai honetan abiatzeagatik.

su utilización para potenciar la creatividad artística y el desarrollo de la imaginación. La cuarta actividad trabaja a través del programa *Morenaments* el estudio e identificación de los 17 grupos de simetrías del plano, así como la utilización del mismo en la creación de diseños artísticos, como las decoraciones geométricas de la Alhambra de Granada. “Embaldosados” es una actividad relacionada con las simetrías del plano que sumerge al lector en el apasionante tema de las diferentes maneras de pavimentar un suelo con azulejos con forma de polígonos regulares, y que de nuevo conecta el saber matemático con la creación artística, siendo algunas obras del pintor M. C. Escher ejemplos motivadores. La siguiente actividad juega con las singulares propiedades de la banda de Moebius, una superficie “suave” no orientable, es decir, con una sola cara. Y se termina esta guía con la creación, utilizando hojas de papel, de bellos fractales.

Esta guía didáctica surge con la pretensión de ser una herramienta útil y atractiva para que el profesorado trabaje con sus estudiantes en el aula, sin embargo, puede ser igualmente utilizada por personas que trabajen en bibliotecas, responsables de talleres didácticos o lúdicos, u organizadores de campamentos de verano. Pero más aún, aconsejamos a cualquier persona, de cualquier edad o formación, que se anime a realizar una lectura personal, o en familia, de la misma y que no tenga reparos en jugar y experimentar con las actividades que se le proponen en estas hojas. No se arrepentirá de realizar este viaje entre las matemáticas y el arte.

I. Koordenatu cartesiarrak edo nola zehaztu puntu baten kokapena espazioan

Gainazal aljebraikoen adierazpenak osatzen dute IMAGINARY erakusketaren zati nagusia; funtsean, SURFER programaren bidez egin dira gainazal aljebraiko horiek. Ekuazio edo adierazpide aljebraiko baten bidez deskribatzen dira gainazal horiek, (x, y, z) koordenatuen bidez, hiru dimentsioko espazioan. Hori horrela, gida honetan proposatzen dugun lehenengo jarduera-multzoaren bidez, koordenatu cartesiarren kontzeptua azaldu, eta ekuazio aljebraikoen adibide erraz batzuk erakutsi ere, nahi diegu ikasleei edo gida hau irakurtzen duen edozein pertsonari.

1. jarduera: Nola zehaztu dezakegu puntu baten kokapena espazioan? Eta plano batean? Galdera horiek egin ditzakegu zuzenean gelan, edo eztabaida bat hasi horien bidez (taldeka edo gela osoaren artean).

Horiei erantzuteko, adibide errazena aztertu behar da lehenbizi, hau da, planoko koordenatu cartesiarrak. Gela huts bat har dezakegu adibide gisa. Zoruko puntu jakin bat zehaztu nahi dugu bertan (bertan zulo bat egin behar dugulako, barra bat jarri edo banaketarako erreferentzia-puntu izatea nahi dugulako). Nola finkatu dezakegu puntu horren kokapen zehatza? Aukera bat puntutik gelako bi horma perpendikularretara dauden distantziak neurtzea da. Horrela, bi zenbaki horiek jakinda, puntu baten kokapena finka dezakegu zoruak osatzen duen planoan. Hori da, funtsean, plano koordenatu bat: puntu nabarmen bat, jatorri izenekoa, eta bi zuzen “perpendikular” (horizontala eta bertikala), ardatz izenekoak. Horiek elkar ebakitzen dute jatorrian, eta, beraz, zenbaki-bikote bakoitzak (x, y) puntu jakin bat adierazten du, ardatz bertikalarekiko x distantzian dagoena, eta ardatz horizontalarekiko y distantzian dagoena.

Koordenatu-sistema horren bidez, gainera, planoko puntu-multzoak adieraz ditzakegu, ezaugarri jakin bat dutenak. Adibidez, $x - y = 0$ adierazpen aljebraikoak $p = (x, y)$ puntuen zuzena

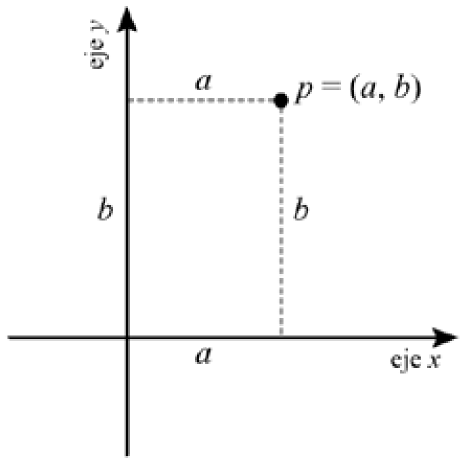
I. Coordenadas cartesianas o cómo determinar la posición de un punto en el espacio

La parte central de la exposición IMAGINARY la constituyen representaciones de superficies algebraicas, realizadas fundamentalmente a través del programa SURFER. Dichas superficies vienen descritas por medio de una ecuación, o expresión algebraica, en términos de las coordenadas (x, y, z) en el espacio de dimensión tres. Por este motivo, la primera serie de actividades que se plantean en esta guía tiene como objetivo introducir a los y las estudiantes, o a las personas que lean esta guía, el concepto de coordenadas cartesianas y mostrarles algunos ejemplos sencillos de ecuaciones algebraicas.

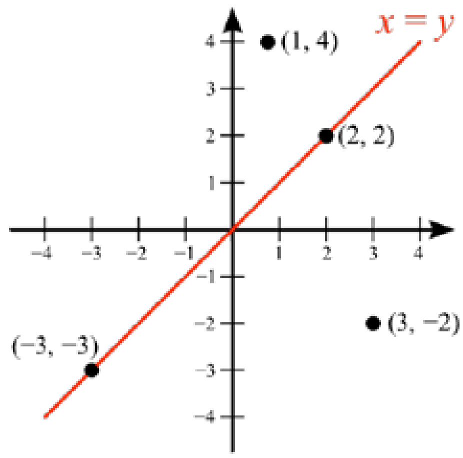
Actividad 1: ¿Cómo se puede determinar la posición de un punto en el espacio? ¿Y en el plano? Estas preguntas pueden plantearse directamente a la clase e iniciar con ellas un debate (por grupos o toda la clase).

Para dar respuesta a las mismas, primero se debe abordar el caso más sencillo, las coordenadas cartesianas del plano. Puede tomarse como ejemplo una habitación vacía en la que se quiere determinar la posición de un punto en el suelo (ya sea porque es el lugar en el que se va a realizar un agujero, colocar una barra o tomarlo como referencia en la distribución). ¿Cómo puede fijarse la posición exacta de ese punto? Una posibilidad es medir las distancias del punto a dos paredes perpendiculares de la habitación. Así, mediante el conocimiento de dos números, es posible establecer la posición de un punto en el plano que forma el suelo. Eso es esencialmente un plano coordenado: un punto destacado, llamado *origen*, y dos rectas “perpendiculares” (horizontal y vertical), llamadas *ejes*, las cuales se cortan en el origen, de forma que cada par de números (x, y) nos determina el punto que está a una distancia x del eje vertical y a una distancia y del eje horizontal.

Este sistema de coordenadas permite además expresar conjuntos de puntos del plano que satisfacen una cierta propiedad. Por ejemplo, la expresión algebraica $x - y = 0$ representa la recta de los adierazten du, non (irudian ikusten den eran) $x = y$ den.

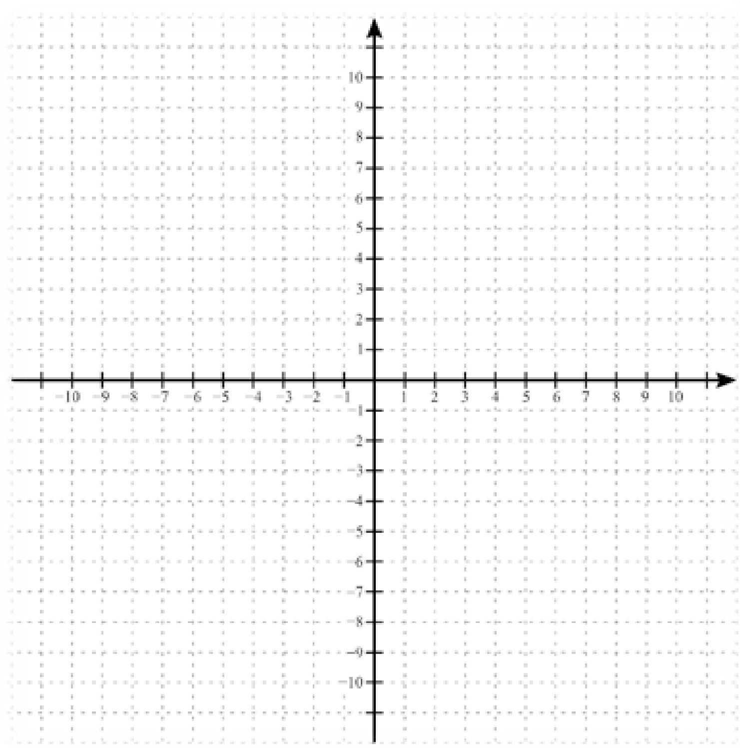


puntos $p = (x, y)$ tales que $x = y$ (como se muestra en la imagen).



Jarraian, plano koordenatuari buruzko jarduera batzuk deskribatzen dira, ikasleek landu ditzaketenak –edo gai horretan interesa duen edonork egin ditzakeenak–. Jarduera horiek egiteko, ardatz koordenatudun txantiloi bat bakarrik behar da (hemen jasotzen dena bezalakoa).

A continuación se describen algunas actividades sobre el plano coordenado que pueden trabajarse con los y las estudiantes –o que puede realizar cualquier persona interesada en el tema–, y para las cuales únicamente se necesita una plantilla con los ejes coordenados (como la que se acompaña aquí).



1.1. (1,7), (3,4), (-1,5), (2,-6), (-1,-2), etab. koordenatu-puntuak plano koordenatuan kokatzea; eta alderantziz, hau da, planoan puntu jakin batzuk emanda, horien koordenatuak zehaztea.

1.1. Situar sobre el plano coordenado los puntos de coordenadas (1,7), (3,4), (-1,5), (2,-6), (-1,-2), etc. y al revés, fijados unos ciertos puntos sobre el plano determinar sus coordenadas.

1.2. Berriz ere txantiloiaren gainean, zenbait ekuazioen bidez emandako puntu-multzoen adierazpena lantzea: i) $x + y = 0$; ii) $x - y = 0$; iii) $x^2 - y^2 = 0$; iv) $y = x^2$; v) $x^2 + y^2 = 1$; etab. eta multzo horiek deskribatzea. Gainera, ikasleek, p = (x, y) denean, $x > y$ puntuen multzoa zein den eztabaida dezakete.

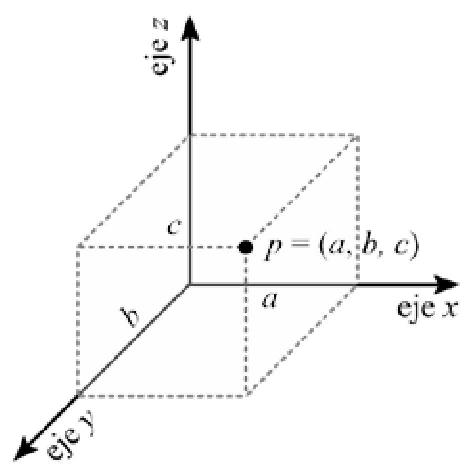
1.3. $x^2(1 - x) - y^2 = 0$,ekuazioak deskribatzen duen planoko multzoa aztertzea (kurba bat da, baina aurrez ez dakigu zer itxura duen), eta galdetzea ea kurba horretakoak diren (0, -2), (-3, 6), (-2, 4), (-1, -1), (3/4, -3/8), etab puntuak. Taldearen arabera, modu aljebraikoan adierazitako planoko beste multzo batzuekin ere egin daiteke jarduera hau.

2. jarduera: Oso interesgarria da, baita ere, jakitea nola finkatu dezakegun puntu baten kokapena gelako espazioan (berriz ere, adibide erreal bat erabil daiteke hori arrazoitzeko, hala nola, argi-foku jakin bat jarri behar den tokia). Erantzuna (x, y, z) zenbaki-hirukote batekin lotuta dago. Lehenengo biak kalkulatzeko, puntutik aurrez aukeratutako bi horma perpendikularretara dagoen distantzia neurtu behar da. Hirugarren zenbakia kalkulatzeko, berriz, zorutik puntura arteko distantzia neurtu behar da. Horrela, hiru dimentsioko espazio koordenatuan sartuko gara: jatorria irudikatzen duen puntu bat, eta puntu horretan elkar ebakitzen duten hiru zuzen “perpendikular”, ardatz izenekoak. Hori horrela, hirukote bakoitzak (x, y, z) espazioko puntu bakar bat zehazten du; z altueran egongo da puntu hori, eta horrek $(x, y, 0)$ zoruko planoaren gainean egingo duen itzalak, $z = 0$ adierazpenarekin, (x, y) puntuaren koordenatuak edukiko ditu (irudian ikusten den eran).

1.2. Trabajar la representación gráfica, de nuevo sobre la plantilla, de los conjuntos de puntos con ecuaciones: i) $x + y = 0$; ii) $x - y = 0$; iii) $x^2 - y^2 = 0$; iv) $y = x^2$; v) $x^2 + y^2 = 1$; etc. y describir dichos conjuntos. Incluso se puede plantear, para discutir entre los y las estudiantes, cuál es el conjunto de los puntos p = (x, y) tales que $x > y$.

1.3. Considerar el conjunto del plano descrito por la ecuación $x^2(1 - x) - y^2 = 0$, que es una curva cuya imagen a priori se desconoce, y plantear si pertenecen a ella los puntos (0, -2), (-3, 6), (-2, 4), (-1, -1), (3/4, -3/8), etc. Si se estima oportuno, puede hacerse esta actividad con otros conjuntos del plano expresados de forma algebraica.

Actividad 2: La siguiente cuestión de interés es cómo determinar la posición de un punto en el espacio de la habitación (puede de nuevo intentar justificarse mediante algún ejemplo real, como el lugar en el que va a ir colocado cierto punto de luz). La respuesta, análogamente, es con una terna de números (x, y, z) donde los dos primeros números se obtienen midiendo la distancia del punto a las dos paredes perpendiculares elegidas previamente y el tercer número corresponde a la altura desde el suelo. Así se introduce el espacio coordenado tridimensional: un punto que representa el *origen* y tres rectas “perpendiculares”, llamadas *ejes*, que se cortan en dicho punto. De esta manera, cada terna (x, y, z) determina el único punto del espacio que está a una altura z y cuya sombra $(x, y, 0)$ sobre el plano del suelo $z = 0$ tiene coordenadas (x, y) (como muestra la imagen).



koordenatu cartesiarrak • coordenadas cartesianas

Aurreko ariketen antzekoak proposa daitezke, baina zaila da hiru dimentsioko espazioa paperean edo arbelean irudikatzea edo bistaratzea (gaur egun, ordenagailua lagungarri izan daiteke horretarako): puntuak hiru dimentsioko espazio koordenatuan kokatzea, adierazpen aljebraiko jakin batzuk aztertzea eta marraztea, etab. Komenigarria litzateke plano batek espazioan duen adierazpen aljebraikoa lantzea $Ax + By + Cz + D = 0$ (forma daukana, non *A, B, C, D* zenbaki errealak diren), eta edozein hiru puntuk zehaztutako planoak kalkulatzea (horietako bat (1,0,0), (0,1,0) eta (0,0,1), eta puntuetatik pasatzen den planoa izan liteke).

Jarduera hori modu dinamikoagoan egin daiteke; ikasleei –edo jardueran interesatuta dagoen edonori– ikasgela, edo edozein gela, hiru dimentsioko espazio koordenatu bihur dezatela esango diegu , eta irudika ditzatela bertan adierazpen aljebraikoen bidez emandako puntuak edo multzoak. Gelan lan zuzena egiteak gaiarekiko interesa areagotuko du. Hasteko, txoko bat aukeratu behar da koordenatuen jatorri gisa, eta O hizkiarekin markatuko dugu. Ondoren, txokotik irteten diren hiru ardatz perpendikularrak izendatu behar ditugu, hau da *x, y, z* (*x* ardatza zoruan ezkerretara dagoena izango da; *y* ardatza eskuinetara dagoena; eta *z* ardatza sabairantz igotzen dena), eta hiru ardatzetan neurriak marraztuko ditugu (adibidez, marka bat 10 cm-ko). Testuinguru horretan, gelan bertan egin ahal izango dugu lehen paperean egindako azterketa (puntuen kokapena adieraztea edo planoak adibidez adierazpen aljebraiko errazen bidez emandako multzoak irudikatzea).

3. jarduera: Hegazkinez bidaiatu behar dugunean, hegazkin-konpainiek gehienezko neurri batzuk ezartzen dituzte esku-fardelentzat. Baina, zer neurri izan ditzake hegazkin-kabinaren barnean eramaten den fardelak edo paketeak? Arraroa badirudi ere, hegazkin-konpainien araudiari jarraiki, "pieza bakar bat izango da, luzera + zabalera + altuera gehienez 115 cm-koa duena"; horrek ez du zehazten neurri jakin bat, aukera ugari baizik. Testuinguru horretan, zenbait gai lan ditzakegu:

Se pueden plantear actividades similares a las anteriores, aunque con el problema de la representación y visualización del espacio tridimensional en un papel o en la pizarra (aunque hoy en día el ordenador puede ser una herramienta útil en este sentido): colocar puntos en el espacio coordenado tridimensional, analizar y representar de ciertas expresiones algebraicas, etc. En particular, sería interesante que se trabajara la expresión algebraica que tiene un plano en el espacio (que es de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, donde *A, B, C, D* son números reales) y que se calcularan ejemplos de planos determinados por tres puntos cualesquiera (uno de ellos podría ser el plano que pasa por los puntos (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1)).

Esta actividad puede hacerse más dinámica, animando a los y las estudiantes –o a quien pueda estar interesado en la misma– a convertir su clase, o una habitación cualquiera, en un espacio coordenado tridimensional sobre el que representar puntos o conjuntos dados por expresiones algebraicas. El trabajo directo sobre el aula motivará un mayor interés por el tema. Primero hay que elegir un rincón como origen de coordenadas y marcarlo con la letra O. Después, se deben nombrar los tres ejes perpendiculares que salen del rincón como ejes *x, y, z* (el eje *x* el que está a la izquierda en el suelo, el eje y a la derecha y el eje *z* el que sube hacia el techo), y pintar las medidas de los tres ejes (por ejemplo, una marca cada 10 cm). En ese contexto, puede trasladarse el estudio planteado anteriormente para el papel sobre la propia aula o habitación (determinar la posición de los puntos o representar conjuntos dados por expresiones algebraicas sencillas, como por ejemplo planos).

Actividad 3: Cuando se va a realizar un viaje en avión resulta que las compañías aéreas exigen que el equipaje de mano no exceda de un cierto tamaño. Pero ¿cuáles son las medidas posibles para esa maleta, o paquete, que se lleva dentro de la cabina del avión? Aunque pueda resultar extraño, la normativa de las compañías aéreas es "una sola pieza de dimensiones, largo + ancho + alto, que no exceda de 115 cm", lo cual no determina una medida fija sino todo un mundo de posibilidades. En este contexto se pueden trabajar algunas cuestiones.

3.1. Hasteko, ikerketa praktiko bat egingo dugu, etxean edo Interneteko dendetan, fardelak bilatzeko eta egiaztatuko dugu ea horien neurriak egokitzen diren esku-fardelen araudira. Egoera hipotetiko batzuk ere proposa ditzakegu, hala nola, eguberri-zuhaitz artifizial bat jasotzen duen kutxa bat, etab.

3.2. Hurrengo jarduera gisa, internet erabiliz, hegazkin-konpainia bakoitzak esku-fardelentzat zer neurri gomendatzen dituen azter dezakegu (Iberiak: 55 x 40 x 20; Air Europak: 55 x 35 x 25; etab.). Horietako bakoitzak zer edukiera (bolumen) duen ere kalkula dezakegu (taula bat egitea komenigarria da).

3.3. Aurreko azterketa kontuan hartuta, ikasleei taldeka zein izango litzatekeen esku-fardelek izan dezaketen gehienezko edukiera azter dezatela proposa diezaiekegu. Ikasleek beren kasa aurkitu behar dute problema horren irtenbidea, egokiena ez bada ere, eta, ondoren, pertsona arduradunak (irakasleak, begiraleak,...) irtenbide guztiak azter ditzake, eta egokiena zein den azaldu ikasleek berau aurkitu ez badute.

Gaia behar bezala ebazteko, batezbesteko aritmetikoen eta geometrikoen arteko desberdintza ezagunera jo behar da. Hiru zenbakientzat hau delarik:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3},$$

eta berdintza betetzen da baldin, eta soilik baldik, $x = y = z$ bada.

Beraz, *x* luzerako, *y* zabalerako eta *z* altuerako fardelaren bolumena, hau da *xyz*, hegazkin-konpainiek jarritako baldintzekin erlaziona daiteke; hau da, $x + y + z$-k 115 cm edo gutxiago izan behar duela dionarekin, izan ere.

3.1. Realizar una primera investigación práctica mediante la búsqueda de maletas, en casa o en tiendas de Internet, y la comprobación de si sus medidas se ajustan a la normativa de equipaje de mano. Incluso se pueden plantear algunos casos hipotéticos, como por ejemplo una caja de cartón con un árbol de navidad artificial, etc.

3.2. La siguiente actividad podría ser la búsqueda, por Internet, de las medidas recomendadas para las maletas del equipaje de mano para las diferentes compañías aéreas (Iberia: 55 x 40 x 20, Air Europa: 55 x 35 x 25, etc.), y el cálculo de la capacidad (volumen) de cada una de ellas (es interesante la realización de una tabla).

3.3. En vista del análisis anterior, se puede plantear a los estudiantes, como una investigación a desarrollar en grupos, el estudio de la capacidad máxima que podría alcanzarse en el equipaje de mano. Es importante que los y las estudiantes busquen su propia solución al problema, aunque no sea la más correcta, y a posteriori la persona responsable (profesor/a, monitor/a,...) puede comentar las soluciones y ofrecer la correcta si no la han conseguido.

Para resolver adecuadamente la cuestión, hay que acudir a la conocida desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, que para tres números es:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3},$$

cumpliéndose la igualdad si, y sólo si, $x = y = z$.

Por lo tanto, puede relacionarse el volumen de la maleta de largo *x*, ancho *y*, y alto *z*, que es igual a *xyz*, con la condición de las compañías aéreas sobre las dimensiones, $x + y + z$ menor o igual que 115 cm, ya que

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{115}{3}\right)^3 \approx 38{,}3^3 = 56.328{,}7\ \mathrm{cm}^3.$$

Ondorioz, 38,3 cm-ko aldea duen fardel kubiko batekin lortuko dugu gehienezko bolumena.

Oharra: jarduera hau gauzatzen dugun bitartean, aipatutako desberdintza aritmetiko-geometriko hori frogatzea proposa daiteke, adibidez, indukzioa

En conclusión, con una maleta cúbica de 38,3 cm. de lado obtendremos el máximo volumen.

Nota: en el transcurso de esta actividad puede plantearse la obtención de una demostración de la anterior desigualdad aritmético-geométrica, por ejemplo erabiliz. Ariketa errazagoa da bi zenbakirentzat frogatzea, hau da,

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

eta desberdintza hori erabiltzea hiru zenbakiei dagokiena frogatzeko.

3.4. Urteetan zehar aireportuetan, prisma angeluzuzen formako edukiontzi metaliko bat egoten zen fardela bertan sartzeko, eta, horrela, ea esku-fardel gisa onartuko zuten jakiteko. Halere, tresna hori ez zen egokitzen "luzera + zabalera + altuera gehienez 115 cm-koa" zion araudiari, zurruna zelako, eta ez zituelako dimentsio desberdinak onartzen.

Fardelen gaia eta espazio koordenatu tridimentsionala erlazionatzen dituen gai aztertzeko arlo interesgarria hegazkin-konpainiek esku-fardelen neurriak (zuzenean neurtu beharrik gabe) egiaztatzeko sistema bat diseinatzea litzateke.

Metodo posible bat fardela hiru dimentsioko espazio koordenatuko puntutzat jotzea da. *a* luzera, *y* zabalera eta *z* altuera duen fardel jakin bat kokatuko dugu hiru dimentsioko sistema koordenatuan. Horren erpinetako bat koordenatuen jatorrian jarriko dugu, eta hiru ertzak ardatzetan jarrita egongo dira(irudian ikusten den eran). Horrela, (*a*,*b*,*c*) koordenatu-puntua jatorrian dagoen erpinaren kontrako erpinak zehaztuko du.

por el método de inducción. Una versión más sencilla consiste en demostrarla para dos números, es decir,

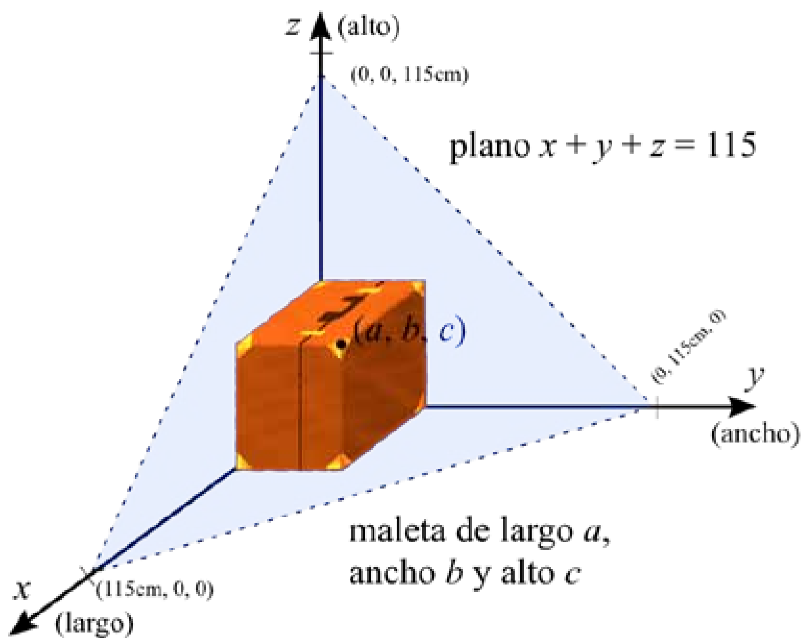
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

y utilizar esta desigualdad para demostrar la correspondiente a tres números.

3.4. Antes, en los aeropuertos, había un contenedor metálico con forma de prisma rectangular en el que introducir la maleta para ver si podía aceptarse como equipaje de mano. Sin embargo, dicho artilugio no se ajustaba a la propia normativa de "largo + ancho + alto que no exceda 115 cm", ya que era rígido y no admitía diferentes dimensiones.

Una cuestión interesante, que relaciona el problema del equipaje con el espacio coordenado tridimensional, es la posibilidad de diseñar un sistema para que la compañía compruebe las medidas del equipaje de mano (sin tener que medirlas directamente).

Un posible método consiste en interpretar una maleta como un punto del espacio coordenado tridimensional. Dada una maleta de largo *a*, ancho *b*, y alto *c*, se coloca en el sistema coordenado tridimensional de forma que uno de sus vértices esté en el origen de coordenadas y tres de sus aristas estén apoyadas en los ejes (como se muestra en la imagen). De esta forma, el vértice opuesto al que está en el origen está marcando precisamente el punto de coordenadas (*a*,*b*,*c*).



Hegazkin-konpainien baldintza ulertzeko, geure buruari honakoa galdetu behar diogu: zer (x, y, z) puntu-multzo dator bat $x + y + z = 115$ adierazpen aljebraikoarekin? (115, 0, 0), (0, 115, 0) eta (0, 0, 115), eta puntuetatik igarotzen den planoa da multzo hori hain zuzen ere. Plano horren azpitik dauden puntu guztiek betetzen dute $x + y + z < 115$ baldintza, eta gainetik dauden puntuek, berriz, horren kontrakoa $x + y + z > 115$.

Ondorioz, jatorri eta ardatz koordenatu gisa erabiliko izkina bat behar du hegazkin-konpainiak, baita hiruki-formako "xafla" plano bat ere (metalezkoa edo plastikozkoa). Triangeluaren erpinak (115 cm, 0, 0), (0, 115 cm, 0) eta (0, 0, 115 cm) puntuetan jarriko dira. Goiko erpinean banda bat jarriko diogu, xafla altxatu eta fardelak sartu ahal izateko. Txokoan fardel bat sartutakoan xafla itxi badaiteke (x, y, z) puntua, hau da, fardelaren dimentsioak zehazten dituzten koordenatuak dituena, xaflaren planoaren azpitik dago, eta beraz $x + y + z < 115$ baldintza betetzen du, ondorioz, fardelak araudia betetzen du. Kontrakoa gertatzen bada, xafla itxi ezin bada, araudia betetzen ez duela esango dugu.

Ikasleek mekanismoa eraiki dezakete gelan; horretarako, 2. jarduerako izkina "koordenatua" erabiliko dute, eta kartoi mehe bat xafla gisa. Behin eraikitakoan, proba praktiko bat egin dezakete fardel batzuekin.

Informazio gehiago nahi izanez gero:
Claudi Alsina, *Contar bien para vivir mejor.* Rubes, 2004.

Para intentar comprender la condición de las compañías aéreas, hay que plantearse qué conjunto de puntos (x, y, z) satisface la expresión algebraica $x + y + z = 115$. Este conjunto es exactamente el plano que pasa por los puntos (115, 0, 0), (0, 115, 0) y (0, 0, 115). Los puntos que están por debajo del plano satisfacen la desigualdad $x + y + z < 115$ y los que están por encima la desigualdad contraria $x + y + z > 115$. En conclusión, la compañía aérea necesitará una esquina que haga las veces de origen y ejes coordenados, una "plancha" plana y triangular (metálica o de plástico) cuyos vértices estén en los puntos (115 cm, 0, 0), (0, 115 cm, 0) y (0, 0, 115cm), con una bisagra en el vértice superior para poderla abrir e introducir las maletas. Si es posible cerrar la plancha cuando colocamos una maleta en el rincón, entonces el punto (x, y, z) cuyas coordenadas determinan las dimensiones de la maleta está por debajo del plano de la plancha, es decir, $x + y + z < 115$, y la maleta satisface la normativa. Lo contrario ocurre cuando no es posible cerrar la plancha.

Los y las estudiantes pueden construir su propio mecanismo en el aula, utilizando la esquina "coordenada" de la actividad 2, y con una cartulina para la plancha. Una vez construida pueden realizar una prueba práctica con algunas maletas.

Más información:
Claudi Alsina, *Contar bien para vivir mejor.* Rubes, 2004.

II. Surfer programa ezagutzen

Alemaniako Kaiserslauterneko Unibertsitate Teknikoak eta Oberwolfach Matematika Ikerketako Institutuak, Imaginary erakusketarako, SURFER programa diseinatu dute. Programa honen bidez, gainazal aljebraikoen irudiak sortu eta bistaratu daitezke modu errazean. Dohainik jaitsi dezakezu honako web-orri honetan: www.rsme-imaginary.es

II. Conociendo el programa Surfer

El programa SURFER es un programa desarrollado por la Universidad Técnica de Kaiserslautern y el Instituto de Investigación Matemática Oberwolfach de Alemania, para la exposición Imaginary. Este programa permite crear y visualizar fácilmente imágenes de superficies algebraicas. Se puede descargar gratuitamente desde la página www.rsme-imaginary.es.

Programa ezagutzeko, honekin jolastea da hoberena. Haurrek zenbakiak edo hitz egiten ikasten duten eran, hau da, modu naturalean eta gurasoek edo eurek jakintza zehatz batzuk eskuratzeko ahaleginik egin gabe; horrela ikasi behar dute ikasleek SURFER erabiltzen. Programa honen funtsean zer jakintza matematiko jasotzen den serioski aztertu gabe; sena, irudimena eta jolasa erabili behar dituzte.

La mejor forma de conocer un programa es jugar con él. De la misma forma que los niños y niñas aprenden los números, o a hablar, de una forma natural y sin que los progenitores, o ellos mismos, se lo planteen como la adquisición de una serie de conocimientos, así deben familiarizarse los y las estudiantes con el programa SURFER. Sin plantearse seriamente el conocimiento matemático que subyace en este programa y dejando paso a la intuición, a la imaginación y al juego.

SURFER lehenengo aldiz erabiltzen duten pertsonek, adierazpen aljebraiko errazekin hasi beharko dute lanean. Pixkanaka, aldaketak egingo dituzte adierazpen horietan, gainazalaren irudia nola aldatzen den ikusteko. Horixe egin behar da jarduera honetan.

Las personas que se acerquen por primera vez al SURFER deberán empezar con expresiones algebraicas sencillas sobre las que ir introduciendo cambios poco a poco con el objetivo de observar las variaciones que producen estos en la imagen de la superficie. En eso consiste esta actividad.

Oharra: SURFERrek esfera ikusezin baten barruan dagoen gainazalaren zatia erakusten du, eta irudia hurbilduz edo urrunduz gero (zoomaren bidez), esfera horren erradioa handiagotzen edo txikiagotzen dea.

Nota: una característica significativa del SURFER es que la imagen mostrada por el programa es la parte de la superficie que está dentro de una esfera invisible, y que acercar o alejar la imagen (mediante un zoom) sólo aumenta o disminuye el radio de esa esfera.

Jarduera honetan, adierazpide aljebraiko batzuk deskribatzen dira, eta manipulazio batzuk egitea gomendatzen da, programa ezagutzen joateko:

En esta actividad se describen algunas expresiones algebraicas y se recomiendan algunas manipulaciones con el objetivo de irse familiarizando con el programa:

1. adierazpen aljebraikoa: $x^2 - a = 0$; ekuazioak bi plano paralelo adierazten ditu $a \neq 0$ denean, eta plano bakar bat $a = 0$ denean.

(SURFER programak bi aldagai, “a” eta “b”, sartzeko aukera ematen du; bakoitzaren balioa, 1 eta 0 artekoa, alda daiteke, gainazalaren irudiaren azpian agertzen den barra horizontalaren bidez).

2. adierazpen aljebraikoa: $x^2 + y^2 - a = 0$; zilindro bat da $a = 0$-rako zuzen batean bilakatzen dena. Oso mehea denez, ez da ikusiko. Zer gertatzen da x-ren edo/eta y-ren berretzaileak aldatzen baditugu? Desberdina al da berretzaile bikoitiak edo bakoitiak erabiltzea? Zer gertatzen da x^2 konstante batekin biderkatzen badugu, hala nola, 10, 1.000 edo 100.000rekin?

3. adierazpen aljebraikoa: $x^2 - y^2 - a = 0$; zilindro hiperboliko bat da, hau da, hiperbola bat, bi plano perpendikularretan bilakatzen dena. $x^2 - y^2 - a = (x - y)(x + y) - a$ denez, gainazala $xy - a = 0$-ren

Expresión algebraica 1: $x^2 - a = 0$; esta ecuación representa dos planos paralelos cuando $a \neq 0$, y un solo plano cuando $a = 0$.

(El programa SURFER permite la inclusión de dos variables “a” y “b”, y cuyo valor, que varía entre 0 y 1, puede modificarse con una barra horizontal que aparece bajo la imagen de la superficie).

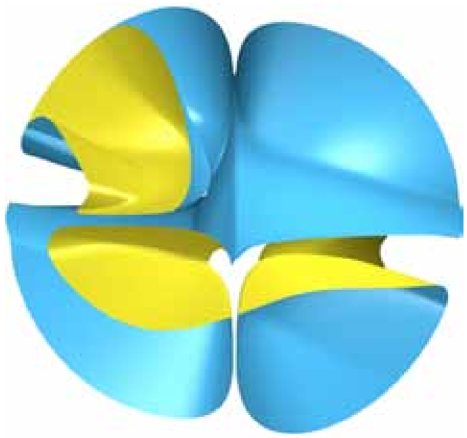
Expresión algebraica 2: $x^2 + y^2 - a = 0$; es un cilindro que degenera en una recta para $a = 0$, que por su “delgadez” no se verá. ¿Qué ocurre si se cambian los exponentes de la x y/o de la y, por otros números? ¿Hay diferencia entre utilizar exponentes pares e impares? ¿Qué ocurre si se multiplica a x^2 por una constante, por ejemplo 10, 1.000 o 100.000?

Expresión algebraica 3: $x^2 - y^2 - a = 0$; es un cilindro hiperbólico, es decir, de una hipérbola, que degenera en dos planos perpendiculares. Como $x^2 - y^2 - a = (x - y)(x + y) - a$, entonces la superficie es esencialberdina da funtsean, koordenatuetan aldaketa txiki bat egitearekin bigarren hau kontsidera dezakegu.

Zer gertatzen da x-ren edo/eta y-ren berretzaileak aldatzen baditugu? Desberdina al da berretzaile bikoitiak edo bakoitiak erabiltzea? Zer gertatzen da x^2 (era berean xy-rentzako) konstante batekin biderkatzen badugu? Eta oraingoan z aldagaia gehitzen badugu, hau da, $xyz - a = 0$ gainazala kontuan hartzen badugu, eta berriro ere aldaketak egiten baditugu?

mente la misma que $xy - a = 0$, sin más que efectuar un pequeño cambio de coordenadas, luego puede considerarse también esta.

¿Qué ocurre si se cambian los exponentes de la x y/o de la y? ¿Hay diferencia entre exponentes pares e impares? ¿Qué ocurre si se multiplica a x^2 (resp. a xy) por una constante? ¿Y si ahora se añade la variable z, es decir, se considera la superficie $xyz - a = 0$, y de nuevo se realizan modificaciones?



$$10x^3 - y^{23} - a = 0$$

4. adierazpen aljebraikoa: Jarraian, gainazal koadratiko errazak azter ditzakegu: esfera ($x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$), azal baten hiperboloidea ($x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$), paraboloidea ($x^2 + y^2 - z = 0$, paraboloide hiperbolikoa ($x^2 - y^2 - z = 0$)... eta, oro har, mota honetako adierazpenak azter di-tzakegu:

$$Ax^2 \pm By^2 \pm Cz^2 = a$$

x, y eta z aldagaien koefizienteak alda ditzakegularik.

Expresión algebraica 4: a continuación, se pueden considerar, como base de este aprendizaje, diferentes superficies cuadráticas sencillas: esfera ($x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$) hiperboloide de una hoja ($x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$), paraboloide ($x^2 + y^2 - z = 0$), paraboloide hiperbólico ($x^2 - y^2 - z = 0$),... y en general, analizar las expresiones del tipo

$$Ax^2 \pm By^2 \pm Cz^2 = a$$

modificando incluso los coeficientes de las variables x, y, z.

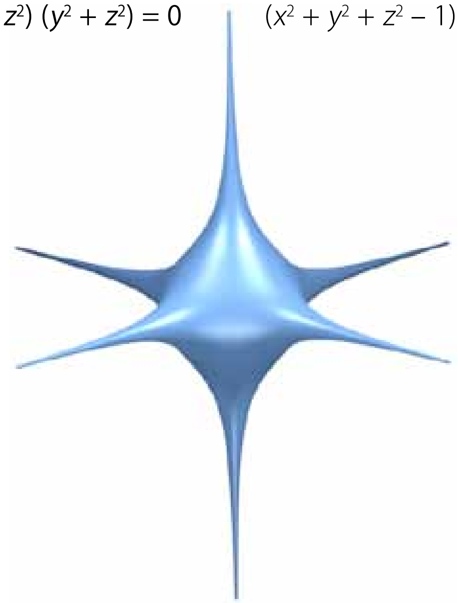
kubo biribildua: $x^6 + y^6 + z^6 - 1 = 0$

cubo redondeado: $x^6 + y^6 + z^6 - 1 = 0$

5. adierazpen aljebraikoa: Hurrengo pausoa SURFERren galerian aurki ditzakegun gainazal aljebraikoen eredu zailagoak aztertzea izango da: singulartasun sinpleak, gainazalak errekorrak, gainazal nabarmenak I. eta II.

Adibide bat izan liteke "Distira" (galerian, Distel). Hori eraikitzeko, ($x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$) esferarekin hasten da, eta ($x^2 + y^2$) ($x^2 + z^2$) ($y^2 + z^2$) zenbaki altu batez biderkatuta, 10^5: ez adibidez, adierazpena gehitu behar zaio, hau da:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + 10^5 (x^2 + y^2) (x^2 + z^2) (y^2 + z^2) = 0$$



Beste behin ere, interesgarria litzateke adierazpen aljebraikoa aldatzeak gainazalean zer ondorio sortzen dituen aztertzea. Jarraian azaltzen diren aldaketen antzekoak egin ditzakegu:

i) 10^5 konstantearen balioa aldatzea;

ii) gehitutako adierazpeneko + zeinuetako bat (edo batzuk) aldatzea eta – zeinua jartzea, adibidez, ($x^2 - y^2$) jartzea ($x^2 + y^2$)-ren ordez;

iii) gehitutako adierazpideko + zeinuetako bat (edo batzuk) aldatzea eta biderketa-zeinua jar-tzea, adibidez, ($y^2 z^2$) jartzea ($y^2 + z^2$)-ren ordez;

iv) ($x^2 + y^2$), ($x^2 + z^2$) eta ($y^2 + z^2$) hiru adierazpenetako bat (edo batzuk) aldatzea, eta aldagaietako bat ber bi jartzea bakarrik, hala nola, x^2, z^2 eta y^2;

v) alda al dezakegu ekuazioa distirak lau punta soilik izan ditzan?

Expresión algebraica 5: El siguiente paso sería considerar los ejemplos, algo más complejos, de superficies algebraicas que nos ofrece la galería de SURFER: singularidades simples, superficies record, superficies notables I y II.

Un ejemplo podría ser "el destello" (Distel en la galería). Para construirla se empieza con la esfera ($x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$), a la que se le añade la expresión ($x^2 + y^2$) ($x^2 + z^2$) ($y^2 + z^2$), multiplicada por un número alto, por ejemplo 10^5:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + 10^5 (x^2 + y^2) (x^2 + z^2) (y^2 + z^2) = 0$$

Y una vez más sería interesante el análisis de los efectos que producen en la superficie cambios en la expresión algebraica, como los sugeridos a continuación.

i) modificar el valor de la constante 10^5;

ii) cambiar uno (o varios) de los signos + de la expresión añadida por un signo —, por ejemplo ($x^2 - y^2$), en lugar de ($x^2 + y^2$);

iii) cambiar uno (o varios) de los signos + de la expresión añadida por un signo de multiplicación, por ejemplo ($y^2 z^2$) en lugar de ($y^2 + z^2$);

iv) cambiar una (o varias) de las tres expresiones ($x^2 + y^2$) , ($x^2 + z^2$) y ($y^2 + z^2$), y por solo una de las variables al cuadrado, por ejemplo, por x^2, z^2 e y^2;

v) ¿podría modificarse la ecuación para que el destello tenga solamente cuatro puntas?

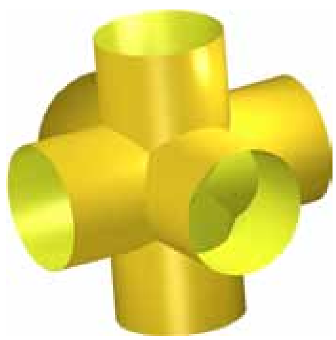
Hustutako bola La bola desinflada

$(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + 10^5 (x^2 y^2) (x^2 z^2) (y^2 z^2) = 0.$

Jarraian, trikimailu erraz batzuk azalduko dira SURFER programa ezagutzen joateko:

1. trikimailua (gainazal aljebraikoak bildura): Horri esker, bi gainazal aljebraiko, edo gehiago, ikus ditzakegu une berean. $f(x,y,z) = 0$ ekuazioak definitzen badu lehenengo gainazalak, eta $g(x,y,z) = 0$ ekuazioak bigarrenak, orduan une berean erakutsi ahal izango dira bi gainazalak, bi adierazpide aljebraiko horiek biderkatuta, hau da, $f(x,y,z)\ g(x,y,z) = 0$ eginda.

Adibidez, honako adierazpen aljebraiko honen bidez bildu ahal izango ditugu hiru zilindro perpendikular:



Gainera, aldaketa erraz bat eginez, gainazal horiek elkar daitezke. Horretarako, nahikoa da "a" aldagaia kentzea ekuazioari (a-ren balioa aldatzeko aukera ematen du SURFERrek, 0 eta 1 artean).

$$(x^2 + y^2 - 1)\ (x^2 + z^2 - 1)\ (y^2 + z^2 - 1) - a = 0.$$

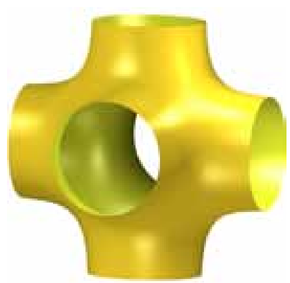
A continuación, algunos sencillos trucos de iniciación en el programa SURFER:

Truco 1 (Unión de superficies algebraicas): Este permite mostrar dos, o más, superficies algebraicas a un mismo tiempo. Sea $f(x,y,z) = 0$ la ecuación algebraica que define la primera superficie y $g(x,y,z) = 0$ la de la segunda, entonces pueden mostrarse las dos superficies al mismo tiempo mediante la multiplicación de ambas expresiones algebraicas $f(x,y,z)\ g(x,y,z) = 0$.

Como ejemplo, la unión de tres cilindros perpendiculares se obtiene mediante la expresión algebraica

$$(x^2 + y^2 - 1)\ (x^2 + z^2 - 1)\ (y^2 + z^2 - 1) = 0.$$

Además, con un sencillo cambio pueden fundirse las superficies consideradas. Simplemente hay que restarle la variable "a" a la ecuación (SURFER permite modificar el valor de a, entre 0 y 1).



Hortik abiatuta, posible al da hiru ardatz koordenatuak marraztea?

2. trikimailua (gainazal aljebraikoen ebakidura): f(x,y,z) = 0 eta g(x,y,z) = 0 gainazal aljebraikoak kontuan hartuta, bi horien ebakidura kontsidera dezakegu. Horretarako $f(x,y,z)^2 + g(x,y,z)^2 = 0$ adierazpena sartu behar dugu SURFERren.

Adibide giza Viviani-ren kurba deskribatzen da. (1, 0, 0) puntuan zentratutako eta 1 erradioko zilindro baten eta jatorrian, (0, 0, 0) n, zentratutako 2 erradioko esfera baten ebakidura bezala lortzen da (ikus irudia). Halere, honako ekuazio hau sartzen badugu SURFERen

$$((x-1)^2 + y^2 - 1)^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = 0$$

ez da ezer ikusiko. Izan ere, kurbak ez dauka lodierarik, eta horregatik ez da ikusten. Ikusi ahal izateko, "a" aldagaia kendu behar diogu ekuazioari.

$$((x-1)^2 + y^2 - 1)^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 - a = 0$$

Trikimailu honek, bi gainazalen ebakidura gisa lortutako kurba irudikatzeko aukera ematen du.

¿Podrían, a partir de este truco, dibujarse los tres ejes coordenados?

Truco 2 (Intersección de superficies algebraicas): Dadas dos superficies algebraicas f(x,y,z) = 0 y g(x,y,z) = 0, se puede considerar la intersección de ambas introduciendo en Surfer la expresión $f(x,y,z)^2 + g(x,y,z)^2 = 0$.

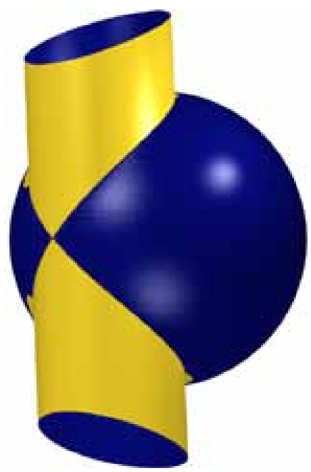
A modo de ejemplo, se describe la curva de Viviani. Esta es la curva que se obtiene como intersección de un cilindro de radio 1 centrado en el punto (1, 0, 0) y la esfera centrada en el origen (0, 0, 0) y de radio 2 (véase la imagen). Sin embargo, si se introduce en el SURFER la ecuación

$$((x-1)^2 + y^2 - 1)^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = 0$$

no se verá nada. El motivo es que la curva no tiene grosor y por eso no se aprecia. Para mostrarla de nuevo hay que restarle la variable "a" a la ecuación.

$$((x-1)^2 + y^2 - 1)^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 - a = 0$$

En particular, este truco permite representar curvas obtenidas como intersección de dos superficies.



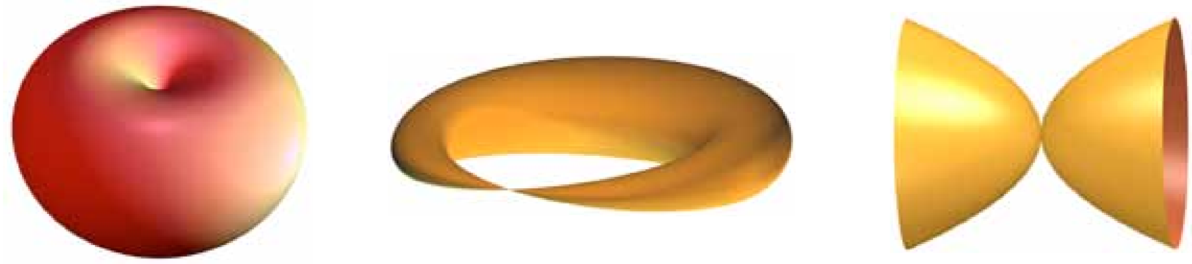
III. Surfer, modelizazioa eta sormena

SURFER programari esker, ikasleak modu errazean eta intuitiboan hurbil daitezke matematiketako prozesu garrantzitsuetara. Modelizazioaren edo ereduak –egitura matematiko sinpleak– sortzeko prozesuen bidez, problemak, hainbat egoera edo bizitza errealeko objektuak deskribatzen dira, eta eredu horiek erabil daitezke objektu berriak sortzeko edo sortze artistikorako.

III. Surfer, modelización y creatividad

El programa SURFER permite a los y las estudiantes acercarse de una manera ligera e intuitiva a dos procesos muy importantes en matemáticas: la modelización, o creación de modelos —estructuras matemáticas sencillas— que describen problemas, situaciones diversas, u objetos de la vida real, y la utilización de dichos modelos para el diseño de nuevos objetos o para la creación artística.

1. jarduera: Eguneroko bizitzako objektuen antzekoak diren gainazalak aurkitzea IMAGINARY erakusketako irudien artean, hala nola...



sagarra, kruasana, diaboloa,...

2. jarduera: Behin ikasleek SURFER programa maneiatzen ikasi dutenean, ekuazio aljebraikoak manipulatzen has gaitezke (programaren galeriako gainazalak har daitezke oinarritzat), bizitza erreaaleko objektuak "imitatzen" dituzten gainazalak sortzeko.

Jarduera hori baliatu daiteke gelan, ikastetxean edo egoki irizten den tokian lehiaketa bat egiteko. "Eguneroko objektuak SURFER programaren bidez adieraztea" izango da lehiaketaren gaia, eta sariak, epaimahaiak, jendearen botoa (ikasleak, internautak,...) etb presta daitezke. Gainera, Imaginary erakusketa dela eta, 2011ean Bilbon eta Espainian antolatutako lehiaketetara igor daitezke irudi horiek; ikus:
www.ehu.es/imaginary edo www.rsme-imaginary.es

3. jarduera: Gainazalen adibideak azal daitezke gelan, edo ikasleei esan ikerketa bat egin dezatela interneten –gida hau irakurtzen duen beste edonork ere egin dezake– diseinuan edo artean erabiltzen diren gainazalak aztertzeko. Ez daukate derrigorrez aljebraikoak izan beharrik. Adibidez, Moebius-en banda (Max Bill, Keizo Ushio, John Robinson), gainazal minimalak (Brent Collins), itsasaldeko gainazal minimala (Helaman Fergusson), paraboloide hiperbolikoa (Andreu Alfaro), torua edo donut-aren gainazala (Richard Serra, Keizo Ushio), eta askoz gehiago.

4. jarduera: Gainazalak aztertzea eta modelizatzea sormen artistikorako oinarri izan daiteke. Jarduera interesgarria da, SURFER programaren bidez, hauetan oinarrituta gainazal aljebraiko edo muntaia berriak sortzea. Sortutako lanak bereziak izango dira horien edertasunagatik, originaltasunaga-

Actividad 1: Buscar entre las imágenes de la exposición IMAGINARY superficies que se asemejen a objetos de la vida cotidiana, como por ejemplo...

manzana, cruasán, diábolo,...

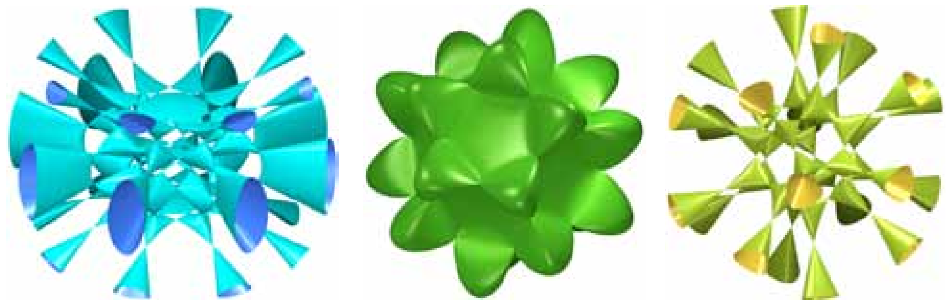
Actividad 2: Una vez que los y las estudiantes han aprendido a manejar el programa SURFER, el siguiente paso puede ser animarse a manipular ecuaciones algebraicas (puede tomarse como base las superficies de la galería del programa) con el fin de crear nuevas superficies que "imiten" objetos de la vida real.

Puede aprovecharse esta actividad para organizar un concurso en el aula, en el centro educativo o donde se considere interesante, sobre "modelización/representación de objetos cotidianos mediante el SURFER", con premios, jurado, votaciones del público (estudiantes, internautas,...). E incluso pueden presentarse las imágenes a los concursos organizados con motivo de la exposición Imaginary en Bilbao, y en España, durante el año 2011, véase www.ehu.es/imaginary o www.rsme-imaginary.es

Actividad 3: Se puede mostrar a los estudiantes en clase, o plantearles que realicen una investigación en Internet –lo mismo que lo puede hacer cualquier lector o lectora de esta guía–, ejemplos de superficies, no necesariamente algebraicas, utilizadas en el diseño o en el arte. Por ejemplo, la banda de Moebius (Max Bill, Keizo Ushio, John Robinson), superficies minimales (Brent Collins), la superficie minimal de costa (Helaman Fergu-sson), paraboloide hiperbólico (Andreu Alfaro), toro o superficie del donut (Richard Serra, Keizo Ushio), y muchas más.

Actividad 4: El estudio y modelización de superficies se convierte así en base para la creación artística. Una actividad muy interesante es el desarrollo de nuevas superficies algebraicas o montajes a partir de estas, con el programa SURFER, que destaquen por su belleza, originalidad, impacto visual, tik, inpaktu bisualagatik... Eta, oraingo honetan ere, "SURFERrekin sortutako irudien" lehiaketa bat antola daiteke.

etc. Y de nuevo se puede organizar un concurso de "imágenes creadas con el SURFER".



IV. Morenaments

Martin von Gagern-ek diseinatu zuen programa hau. Horri esker, apaingarriak sor ditzakegu modu errazean. Esku hutsez marraztutako jatorrizko ereduetatik abiatuta sortzen dira apaingarriak, eta plano euklidestarreko simetria-taldeetako baten arabera osatzen dira. Dohainik eskura daiteke honako web-orri honetan:
http://www.morenaments.de/euc/

Hasierako definizioak. edozein marrazki sinpleri motibo geometrikoa deituko diogu. Motibo hori norabide jakin batean errepikatzen bada, friso deritzona lortzen dugu, behean azaltzen den marrazkian erakusten denaren modukoa.

IV. Morenaments

Este programa, diseñado por Martin von Gagern, permite generar ornamentos de forma sencilla, partiendo de modelos originales realizados a mano alzada los cuales se completan según alguno de los grupos de simetría del plano euclídeo. Se puede conseguir gratuitamente desde la página http://www.morenaments.de/euc/

Definiciones previas. Se llamará motivo geométrico a cualquier dibujo simple. Si dicho motivo se repite en una dirección dada, se obtiene lo que se llama un friso, como el que se muestra en la figura inferior.

Motiboa bi norabidetan errepikatzen bada, mosaiko bat lortzen da; talde kristalografiko ere deitzen zaio.

Si el motivo se repite en dos direcciones, se trata de un mosaico, también llamado grupo cristalográfico.

Frisoak edo mosaikoak eraikitzeko metodo erraz bat oinarrizko motiboa hautatzea eta horrekin, norabide batean edo bietan, oinarrizko mugimenduak egitea da.

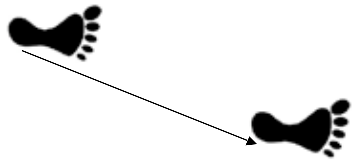
Tanto para construir frisos como mosaicos, un método sencillo consiste en elegir el motivo básico y realizar con él diferentes movimientos elementales, en una o dos direcciones.

Jarraian, laburki deskribatuko ditugu planoan egin daitezken oinarrizko mugimenduak:

Se describen a continuación de forma breve los diferentes movimientos elementales en el plano:

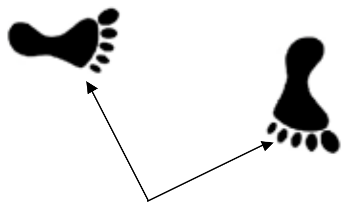
Norabide jakin bateko Translazioa: Gezi edo bektore baten hasieratik bukaeraraino eraman ostean oinarrizko motiboa kopiatzen da.

Traslación en una dirección dada. El motivo básico se reproduce al trasladarlo desde el inicio hasta el final de una flecha o vector.



Angelu jakin baten araberako errotazioa edo biraketa: Oinarrizko motiboa angelu jakin batean biratu egiten da.

Rotación o giro según un ángulo determinado. El motivo inicial gira un ángulo dado.

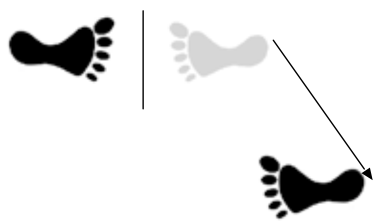


Ispilu-islapena. Ispilu batean islatutako irudi baten antzera kopiatzen da marrazkia.

Reflexión especular. La figura se reproduce como la imagen reflejada por un espejo.

Islapen lerratua. Translazio batez konposaturiko ispilu-islapen bat da.

Reflexión deslizada. Se trata de una reflexión especular seguida de una traslación.



Frisoen zenbait eredu: Emaitza harmonikoak eta simetrikoak lortzeko arte-dekorazioan eta –ornamentazioan, motibo apaingarri bera lerro zuzen batean zehar errepikatzetik sortzen diren diseinuak erabili ohi dira; adibidez, zeramikazko greketan–, mendeletan eta alfonbren ertzetan. Horrela elementu apaingarri horietako bakoitzak friso-taldea deritzona sortzen du. Azterketa geometriko bat eginez gero planoko mugimendu-taldeen ezaugarrien gainean, friso-taldeak osatzeko zazpi modu bakarrik daudela ikusiko dugu.

Distintos modelos de frisos. En la decoración y ornamentación artística es común crear diseños que consisten en la repetición de un mismo motivo ornamental a lo largo de una línea recta –por ejemplo en las grecas de cerámica, cenefas y bordes de alfombras– , con el objeto de dar al resultado final un aspecto más armónico y simétrico. Cada elemento decorativo genera de esta manera lo que se llama un grupo de frisos. Un estudio geométrico, basado en las propiedades del grupo de movimientos en el plano, permite deducir que únicamente son posibles siete formas distintas de generar los grupos de frisos.

Jarraian azaltzen dira horiek guztiak adierazten dituzten irudiak, horiek identifikatzeko sinbologiarekin batera (Nazioarteko Kristalografia Elkarteak onartutako sinbologia).

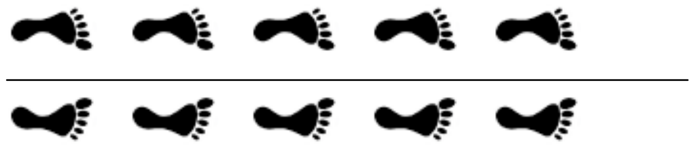
Se muestran a continuación imágenes representativas de todas ellas, junto con su símbolo identificativo, adoptado por la Unión Internacional de Cristalografía.

p1: translazioa.

p1: traslación.

pm: translazioa gehi islapena ardatz horizontaletik.

pm: traslación más reflexión por eje horizontal.

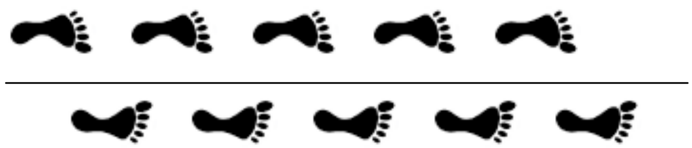


p/m: translazioa gehi islapena ardatz bertikaletik.

p/m: traslación más reflexión por eje vertical.

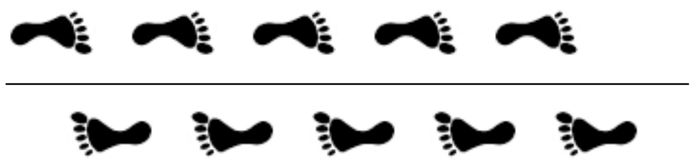
pg: translazioa gehi islapen lerratua.

pg: traslación más reflexión deslizada.



p2: translazioa gehi 180º-ko biraketa.

p2: traslación más rotación de 180º.

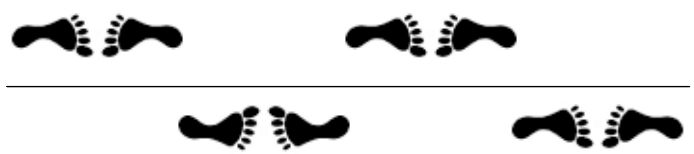


p2m: translazioa gehi 180º-ko biraketa gehi islapena.

p2m: traslación más rotación de 180º más reflexión.

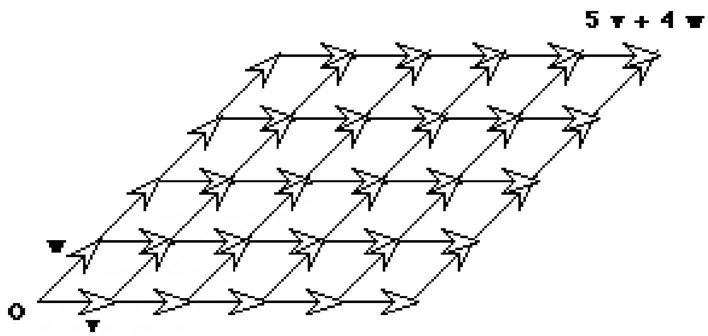
p2g: translazioa gehi 180º-ko biraketa gehi islapen lerratua.

p2g: traslación más rotación de 180º más reflexión deslizada.



Zenbait mosaiko-eredu: Oinarrizko motiboa edo irudia bi norabide desberdinetan errepikatzen bada, mosaiko edo talde kristalografiko plano bat sortzen da. Bi translazioen norabideek seinalatzen dituzten bektoreek oinarrizko paralelogramoa deritzona osatzen dute, eta plano osoan zehar errepikatzen da hori, irudian ikus daitekeen eran.

Distintos modelos de mosaicos. Si el motivo o figura básica se repite en dos direcciones distintas, origina un mosaico o grupo cristalográfico plano. Los dos vectores que señalan las direcciones de las dos traslaciones generan el llamado paralelogramo fundamental, que se repite a lo largo de todo el plano, como el que se muestra en la figura.



Mosaiko bat eraikitzeko, aipatutako bi translazioez gainera, beste mugimendu batzuk ere egin daitezke, hala nola, biraketak eta islapenak. Ikus daitekeen bezala, irudia aldaezin uzten duten mugimenduak soilik egin daitezke.

Egin daitezkeen biraketak kontuan hartuta, matematikoki frogatu da honako biraketa-angelu posible hauek soilik daudela: 60º, 90º, 120º, 180º eta 360º (azken hori biraketarik ez egitearen baliokidea da).

Apaingarri planoen konfigurazio posible guztiak teorikoki zehaztea zaila bada ere (Evgraf Fedorov-ek, 1891an, planoan 17 simetria-talde soilik egon daitezkeela frogatu zuen; bai eta, bere aldetik, George Pólya-k ere, 1924an), antzinako apaingarrietan horien guztien adibideak aurkitu dira. Granadako Alhambrakoak dira aipagarrienak, haien balio estetikoa dela eta.

Hainbat modutan identifika ditzakegu horma-irudietako 17 simetria-taldeak. Nazioarteko Kristalografia Elkarteak onartutako modua erabiltzen du MORENAMENTS programak. Notazio kristalografikoa gelaxka-unitatearen ezaugarriak identifikatzen dituzten lau sinboloz edo gutxiagoz osatzen da.

Xehetasun tekniko handirik eman gabe, horietako bakoitza deskribatuko dugu jarraian. Gelaxka-unitatea ere erakusten da (gune grisa), biraketak eta islapenak kontuan hartu gabe aukeratutako bi norabideen arabera sortzen dena (MORENAMENTS programan, pantailako beheko eskuineko aldean agertzen da). Bestalde, funtsezko gunea ere erakusten da (txikiena, marra urdinez mugatuta dagoena); gune txikiena da, eta baldosadura osoa lor daiteke horren bidez (MORENAMENTS programan, pantailaren ezkerreko aldean eskuz marrazten den irudia da).

Para construir un mosaico, además de las dos traslaciones indicadas, se pueden realizar otros movimientos, como rotaciones y reflexiones. Puede observarse que los únicos movimientos posibles son los que dejan la figura invariable.

Fijando la atención en los posibles giros, se ha probado matemáticamente que los únicos posibles ángulos de giro son 60º, 90º, 120º, 180º y 360º (este último equivale a no realizar ningún giro).

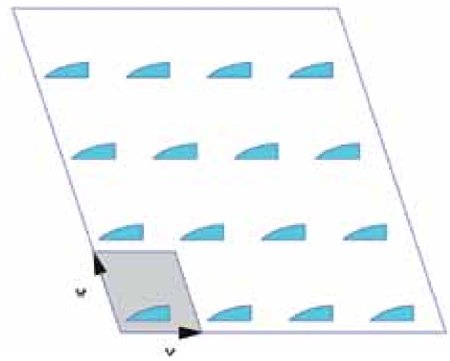
A pesar de la dificultad teórica para determinar todas las posibles configuraciones de ornamentos planos (la demostración de que sólo puede haber 17 grupos de simetría en el plano se debe a Evgraf Fedorov en 1891 e, independientemente, por George Pólya en 1924), se han encontrado ejemplos de todos ellos en ornamentos antiguos. Los más destacables por su valor estético son los de la Alhambra de Granada.

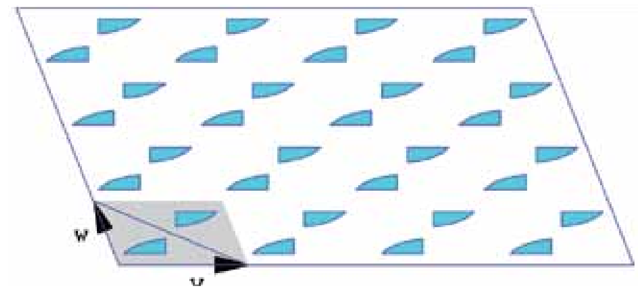
Existen distintas formas de identificar los 17 grupos de simetrías de murales. La utilizada en el programa MORENAMENTS es la aceptada por la Unión Internacional de Cristalografía. La notación cristalográfica consiste en cuatro o menos símbolos que identifican las características de la celda unidad.

Sin entrar en excesivos detalles técnicos, se describen a continuación las características de cada una de ellas. Se muestran también (región sombreada) la baldosa unidad, la que se reproduce según las dos direcciones elegidas sin contar giros ni reflexiones (en el programa MORENAMENTS es la que aparece en la parte inferior derecha de la pantalla) y la región fundamental (la más pequeña que está limitada por líneas azules), la más pequeña mediante la cual se puede obtener todo el embaldosado (en el programa MORENAMENTS corresponde a la imagen que se dibuja a mano en la parte izquierda de la pantalla).

p1: translazioak soilik (biraketarik, islapenik edo islapen lerraturik gabe) (ezquerrekoa)
p2: translazioak eta 180º-ko biraketa (islapenik eta islapen lerraturik gabe) (eskuina)

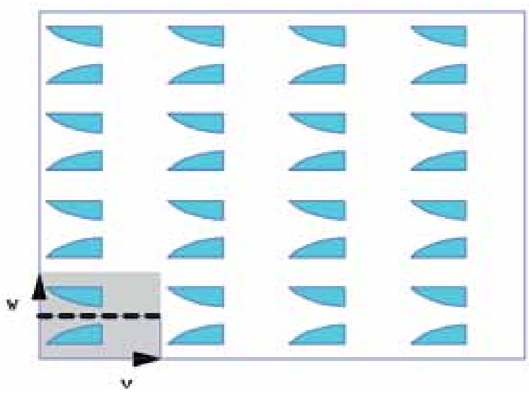
p1: sólo traslaciones (sin rotaciones, reflexiones ni reflexiones deslizadas) (izquierda)
p2: traslaciones y giro de 180º (sin reflexiones ni reflexiones deslizadas) (derecha)

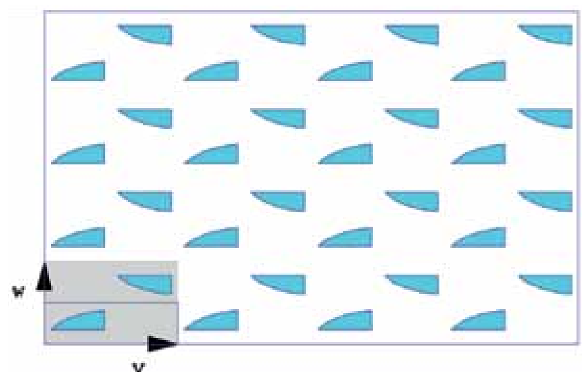




pm: translazioak eta islapena puntu-lerroaren arabera (islapen lerratu bateko edozein ardatz islapen bateko ardatz da)
pg: translazioak eta islapen lerratua (biraketarik eta islapenik gabe)

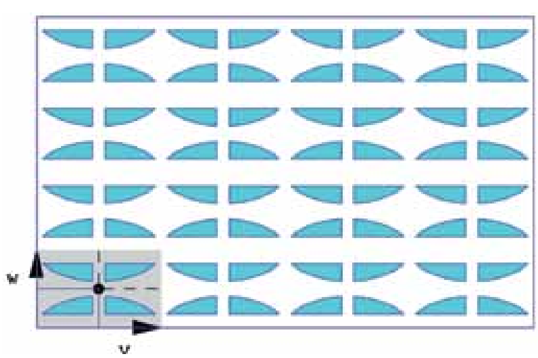
pm: traslaciones y reflexión según la línea de puntos (cualquier eje de una reflexión deslizada es eje de una reflexión)
pg: traslaciones y reflexión deslizada (sin rotaciones ni reflexiones)

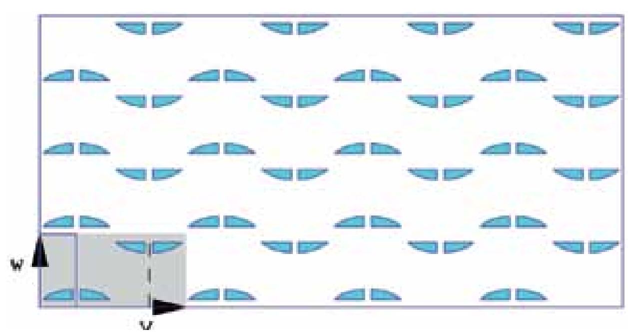




pmm: translazioak, 180º-ko biraketa eta islapena puntu-lerrotik (islapen lerratu bateko edozein ardatz islapen bateko ardatz da)
pmg: translazioak, 180º-ko biraketa eta islapena puntu-lerroaren arabera (islapen lerratua dauka, eta horren ardatza ez da paraleloa islapen-ardatzekiko)

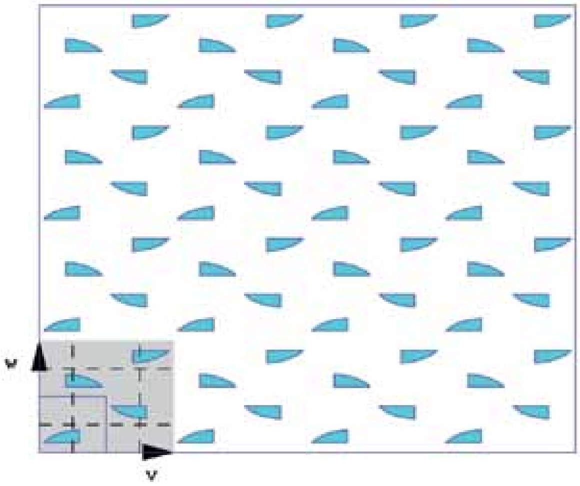
pmm: traslaciones, giro de 180º y reflexión por la línea de puntos (cualquier eje de una reflexión deslizada es eje de una reflexión)
pmg: traslaciones, giro de 180ª y reflexión según la línea de puntos (tiene una reflexión deslizada cuyo eje no es paralelo a ningún eje de reflexión)

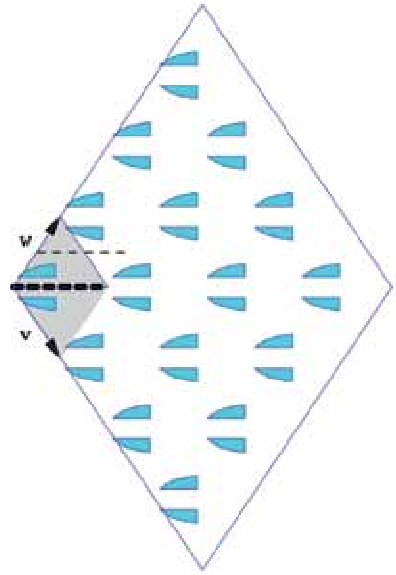




pgg: translazioak, 180º-ko biraketa eta islapen lerratua (ez dauka islapenik)
cm: translazioak eta islapena erronboaren diagonalarekiko (islapen lerratu bat dago, eta horren ardatza ez da islapen-ardatza)

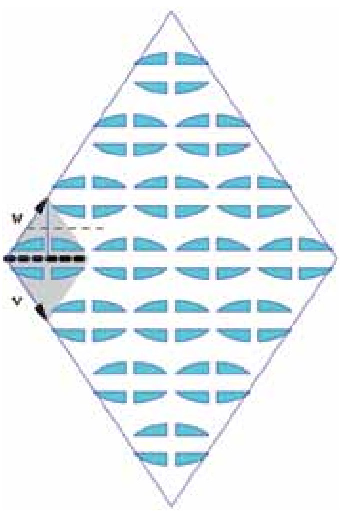
pgg: traslaciones, giro de 180º y reflexión deslizada (no contiene reflexiones)
cm: traslaciones y reflexión respecto a la diagonal del rombo (hay una reflexión deslizada cuyo eje no es eje de reflexión)

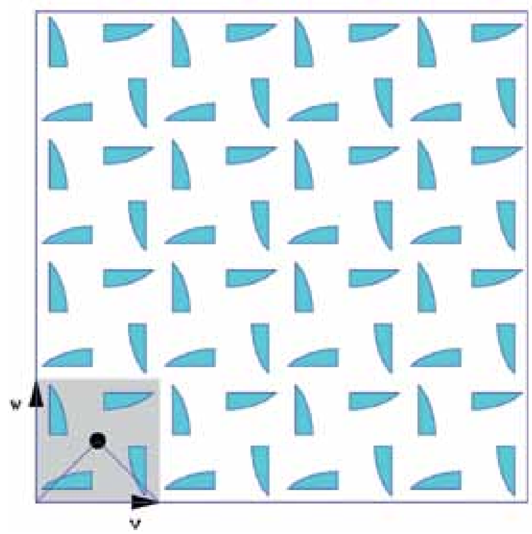




cmm: translazioak, 180º-ko biraketa eta islapena erronboaren diagonalarekiko (islapen lerratu bat dago, eta horren ardatza islapen ardatzarekiko paraleloa da)
p4: translazioak eta 90º-ko biraketa (islapenik eta islapen lerraturik gabe)

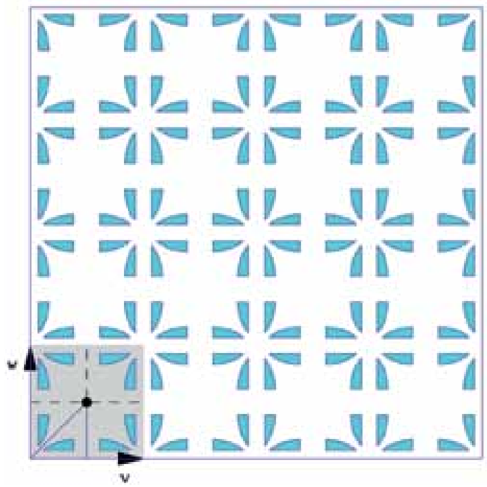
cmm: traslaciones, giro de 180º y reflexión respecto a la diagonal del rombo (hay una reflexión deslizada cuyo eje es paralelo a un eje de reflexión)
p4: traslaciones y giro de 90º (sin reflexiones ni reflexiones deslizadas)

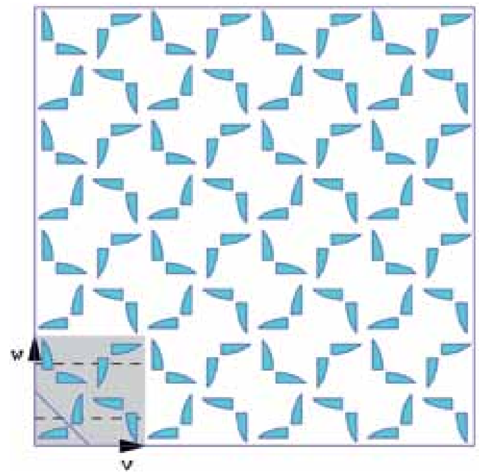




p4m: translazioak, 90º-ko biraketa eta islapena puntu-lerrotik (biraketa-zentroa islapenen baten ardatzekoa da)
p4g: translazioak, 90º-ko biraketa eta islapen lerratua (horren biraketa-zentroa islapen-ardatz batek ere ez du barnean)

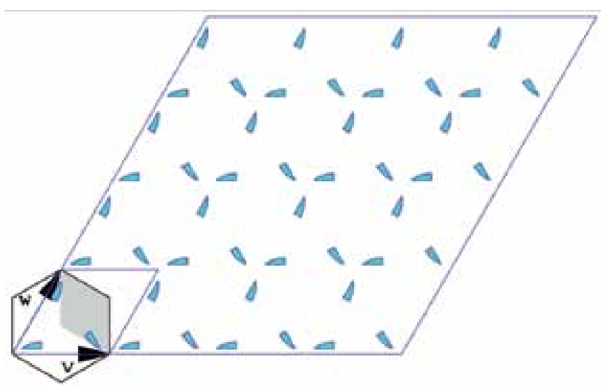
p4m: traslaciones, giro de 90º y reflexión por la línea de puntos (el centro de rotación pertenece al eje de alguna reflexión)
p4g: traslaciones, giro de 90º y reflexión deslizada (tiene un centro de rotación que no está contenido en ningún eje de reflexión)

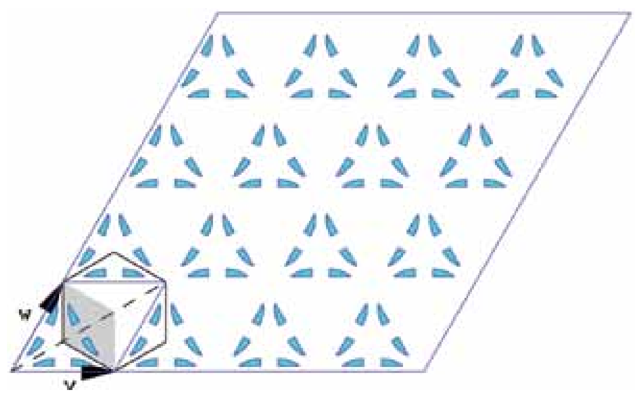




p3: translazioak eta 120º-ko biraketa (islapenik gabe)
p3ml: translazioak, 120º-ko biraketa eta islapena (biraketa-zentro guztiak dira islapen-ardatzen batekoak)

p3: traslaciones y giro de 120º (sin reflexiones)
p3ml: traslaciones, giro de 120º y reflexión (cualquier centro de rotación pertenece a algún eje de reflexión)

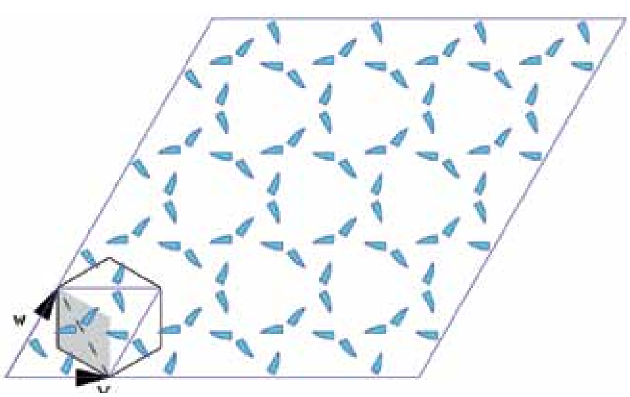


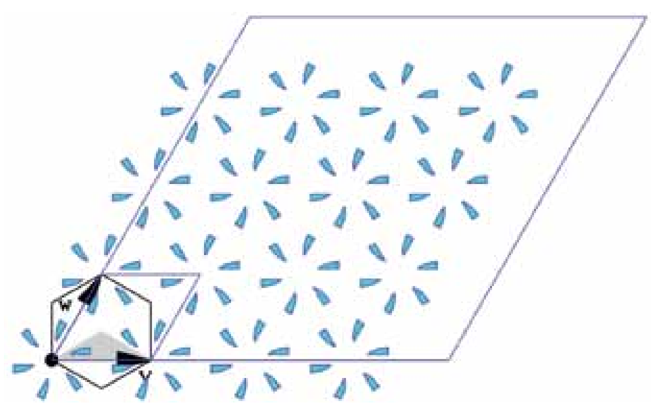


p3lm: translazioak, 120º-ko biraketa eta islapena (biraketa-zentro bat ere ez da inongo islapen-ardatzetakoa)
p6: translazioak eta 60º-ko biraketa (islapenik gabe)

p3lm: traslaciones, giro de 120º y reflexión (un centro de rotación no pertenece a ningún eje de reflexión)

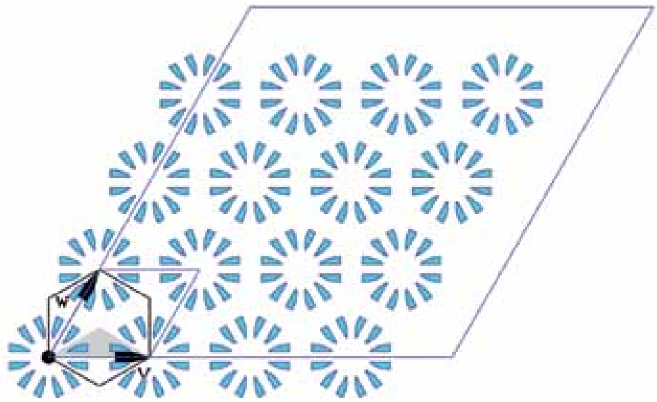
p6: traslaciones y giro de 60º (sin reflexiones)





p6m: translazioak, 60º-ko biraketa eta islapena puntu-lerrotik

p6m: traslaciones, giro de 60º y reflexión por la línea de puntos



1. jarduera: Erabili sormena baldosadura original bat diseinatzeko, eta proba egin kolore desberdinekin eredu estetikoak sortzeko.

MORENAMENTS programan, lerro batzuk marraztu behar dira pantailaren ezkerreko aldean, kolore eta lodiera desberdinak izango dituztenak. Jarraian, eskuineko aldearen goialdean dauden sinboloak sakatu behar dira, eta horrela mosaiko desberdinak lortuko ditugu. Ondoren, eskuineko aldearen behealdean dagoen laukizuzena aldatu behar da, horren erpinetan dauden puntuak arrastatuz. Puntu urdina mugitu behar da oinarrizko laukizuzena lekuz aldatzeko, eta puntu berdea eta gorria horren forma eta dimentsioak aldatzeko.

Une bakoitzean zer emaitza lortu dugun aztertzea gomendatzen dugu, eta haien itxura estetikoari dagokionez ereduak alderatzea.

Bigarren fase batean, beste mota bateko lerroak probatzea gomendatzen da; lodiera desberdinetako kurbak, grafikoko zenbait elementuren arteko puntuak, lerro lodiagoetan barne hartutako lerro meheak, etab. Posible al da karratu, triangelu edo izar bat lortzea lerro bakar bat marraztuta?

Aukera ugari sortzen dira horrela, gela edo horma bat apaintzeko motibo bihur daitezkeenak.

2. jarduera: Irudi batetik abiatuta, eraiki programak eskaintzen dituen simetria-talde guztiak.

Horretarako, programako pantailaren ezkerreko aldean irudi sinple bat, simetriarik ez duena, ma-

Actividad 1: Utilizar la creatividad para diseñar un embaldosado original y experimentar con diferentes colores para construir modelos estéticos.

Utilizando el programa MORENAMENTS, han de trazarse algunas líneas en la parte izquierda de la pantalla, de colores diversos y grosores diferentes. A continuación, se pulsa en los símbolos de la parte superior derecha observando los diferentes mosaicos que se consiguen. Después, se modifica el rectángulo de la parte inferior derecha arrastrando los puntos situados en sus vértices. Mover el punto azul para trasladar el rectángulo fundamental y los puntos verde y rojo para cambiar la forma y dimensiones del mismo.

Se sugiere observar en cada caso el resultado obtenido y comparar los distintos modelos en cuanto a su apariencia estética.

En una segunda fase, se aconseja experimentar con otro tipo de trazos, curvas de diferentes grosores, puntos entre los distintos elementos de la gráfica, líneas más finas contenidas en otras más gruesas, etc. ¿Puede conseguirse hacer un cuadrado, o un triángulo, o una estrella, dibujando una sola línea?

Se abre así un inagotable mundo de posibilidades, que pueden convertirse en motivos decorativos para una habitación o una pared.

Actividad 2: A partir de una imagen, construir los diferentes grupos de simetría que ofrece el programa.

Para ello, basta dibujar una imagen sencilla, que no tenga simetrías, en la parte izquierda de la pantalla del rraztea nahikoa da. Jarraian, eskuineko aldearen goialdean dauden sinboloak sakatu behar dira. Lortutako emaitzak aztertuz gero, horietan simetriak aurkituko ditugu. Orain, lortutako emaitzak alderatuko ditugu aurreko atalean azaldutakoekin, eta ea guztiak dauden egiaztatu daiteke. Apaingarriak dituen simetria guztiak ez badaude hor, hori konpontzeko jatorrizko eredua alda dezakegu, eta sinpleago bat jarri, edo oinarrizko laukizuzenaren dimentsioak alda ditzakegu.

Behin mekanismoa ulertu dugunean, eredu landuagoak sortzen ahalegindu gaitezke, eta marrazkia osa dezakegu beste elementu grafiko batzuk erabiliz.

3. jarduera: Apaingarri jakin bati, programaren bidez lortutakoa edo kanpoko irudi bat, zer simetria-talde dagokion jakitea.

Ohiko inguruneko irudi ugari erabil ditzakegu jarduera hau egiteko, hala nola, margotutako paperez apaindutako hormak, motibo geometrikoak dituzten baldosa-zoruak, interneten eskuragarri dauden lan artistikoak, etab.

Simetria-taldea zein den jakiteko, metodo ohikoena oinarrizko paralelogramoa bilatzea da. Hori aurkitzeko intuiziozko modu bat paralelogramo bat bilatzea da, ABCD adibidez, eta, beraz:

- Paralelogramo hori lekualdatzen badugu AB eta AC bektoreek emandako norabideen arabera, irudi osoa lortuko dugu berriz ere.
- Gainera, ABCD paralelogramoa eduki daitekeen alde txikiena duena da.

Paralelogramoa aurkitu ostean, ereduaren ezaugarri geometrikoak zein diren jakin behar dugu; horretarako, biraketa-zentroak eta simetria-ardatzak zehaztu behar ditugu.

Gelan lan egiteko, interesgarria litzateke jardueran parte hartzen dutenei mosaikoen adibide erreal batzuk aurkeztea, artearen edo diseinuaren mundutik ateratakoak, horien simetria-taldeak bila ditzaten (Granadako Alhambra, Escher-en marrazkiak, etab.). Beste aukera pertsonalago bat, artean, diseinuan eta, oro har, kulturan agertzen diren frisoen eta mosaikoen ikerketa bat egitea da, eta lortutako adibideak lehen azaldutako kategorietan sailkatzea.

programa. A continuación, se pulsa en los diferentes símbolos que aparecen en la parte superior derecha. Observando los resultados obtenidos, se trata de descubrir las simetrías que aparecen en ellos. Entonces, se comprueban los resultados conseguidos con los indicados en el apartado anterior, para saber si están todas. Si no se encuentran todas las simetrías que tiene el ornamento, una técnica para resolver esta cuestión puede ser cambiar el modelo original por otro más sencillo o variar las dimensiones del rectángulo básico.

Una vez entendido el mecanismo, se puede intentar la creación de modelos más elaborados, completando el dibujo con nuevos elementos gráficos.

Actividad 3: Reconocer el grupo de simetría que corresponde a un ornamento dado, ya sea obtenido en el programa o de una imagen externa.

Muchas imágenes de nuestro entorno habitual, paredes decoradas con papel pintado, suelos de baldosas con motivos geométricos, diversas creaciones artísticas disponibles en Internet, son apropiadas para realizar esta actividad.

El método usual para el reconocimiento del grupo de simetría consiste en encontrar un paralelogramo fundamental. Una forma intuitiva de encontrarlo es buscar un paralelogramo, digamos ABCD, de tal manera que:

- Si se traslada dicho paralelogramo según las direcciones dadas por los vectores AB y AC, obtenemos de nuevo la figura completa.
- Además el paralelogramo ABCD es aquel cuyos lados son los menores posibles.

Después de encontrar el paralelogramo, hay que descubrir las propiedades geométricas del modelo, mediante la determinación de los centros de giro y los ejes de simetría.

Como actividad para un aula, sería interesante proporcionar a las personas que participan en el mismo una serie de ejemplos reales de mosaicos, sacados del mundo del arte o del diseño, para que intenten encontrar sus grupos de simetría (Alhambra de Granada, dibujos de Escher, etc.). Otra opción más personal puede ser la realización de una investigación de ejemplos de frisos y mosaicos que aparecen en el arte, el diseño y la cultura en general, clasificando los ejemplos obtenidos según las clasificaciones anteriores.

Talde kristalografikoei buruzko informazio gehiago nahi izanez gero:

http://www.math.arq.uva.es/gycga/apuntes/GrupCristal/GrupCristal.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

http://jmora7.com/Mosaicos/

Más información sobre los grupos cristalográficos:

http://www.math.arq.uva.es/gycga/apuntes/GrupCristal/GrupCristal.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

http://jmora7.com/Mosaicos/

V. Baldosadurak

Aurreko jarduerarekin lotuta, honako hau ere egin dezakegu: mosaikoak sortu poligono erregularren bidez.

1. jarduera (poligono erregularrak): Lehenengo jarduera honetan, ikasleek poligono erregularrak ezagutuko dituzte, bai eta horien barne-angeluak ere. Bestalde, jarduera honekin, analogia bidezko arrazoibidea lan dezakegu; kasu ezagun batzuk manipulatuko ditugu, eta problema ebazteko estrategia aurkituko dugu.

1.1. Hasteko poligono erregularrei buruz hitz egin diezaiekegu ikasleei, eta esan diezaiekegu bila ditzatela horietako batzuk gelan edo toki komunetan, hala nola, etxean, patioan, etab.

1.2. Horietako batzuk eraiki ditzakegu (horien eredu fisikorik ez badaukagu), adibidez, triangelu ekilateroak, karratuak, pentagonoak eta hexagonoak. Eraikuntzarako kartoi mehea, apar-goma edo beste materialen bat erabil dezakegu; eta ahal den heinean poligono guztiek luzera bereko aldeak izan behar dituzte.

1.3. Zirkuluerdi graduatua (angelu-garraiagailua) erabili gabe, ikasleek triangelu ekilatero baten barne-angeluak identifikatuko eta kalkulatuko dituzte (60º, triangelu baten angelu guztien batura 180º delako, eta triangelu honen hiru angeluak berdinak direlako). Baita karratu batenak ere (angelu zuzenak dira guztiak, 90º). Irudia hexagono bat bada, 6 triangelu aldekidetan bana daiteke, eta triangelu horiek

V. Embaldosados

Una actividad muy relacionada con la anterior consiste en la generación de mosaicos por medio de polígonos regulares.

Actividad 1 (Polígonos regulares): En esta primera actividad los y las estudiantes se familiarizarán con los polígonos regulares y los ángulos internos de estos. Por otro lado, esta actividad permite trabajar los argumentos por analogía, manipulando algunos casos conocidos y viendo la estrategia para resolver el problema.

1.1. Como actividad para el aula, podría comenzarse hablando a los estudiantes sobre los polígonos regulares y pedirles que encuentren algunos de ellos en el aula o en lugares comunes, como la casa, etcétera.

1.2. Pueden construirse algunos de ellos, por ejemplo, triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos y hexágonos, con cartulina, goma-espuma o algún otro material (salvo que ya se disponga de algunos modelos físicos de los mismos), y a ser posible con la misma longitud de lado para los diferentes polígonos.

1.3. Sin utilizar el semicírculo graduado (transportador de ángulos) los y las estudiantes sabrán identificar y calcular los ángulos internos de un triángulo equilátero (60º, puesto que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º, y en este caso, los tres son iguales) y un cuadrado (todos son ángulos rectos, 90º). Si la figura es un hexágono, se puede dividir en 6 triángulos equiláteros, con un vértice común, erpin komuna izango dute; beraz, hexagonoaren barne angeluek 120º dituela ondoriozta dezakegu.

Oharra: adinen arabera, banakako edo taldekako ikerketa bat proposa diezaiekegu. Triangelu baten angeluen batura 180º-koa dela egiaztatzea alegia.

1.4. alde dituen poligono baten barne-angeluak kalkulatzeko gakoa hexagonoaren adibideak ematen digu. Poligonoa triangelu isoszele berdinetan banatu behar da, eta horrela, erraza da barne-angelua kalkulatzea:

- Poligonoa barrutik triangelutan banatu dugunez, triangelu isoszele ditugu, 360º/n angelua-rekin.
- Beste bi angeluak berdinak direnez, 180º = 2α + 360º/n. Bistakoa denez, barne angelua α-ren bikoitza da, eta, beraz

180º (n — 2)/n.

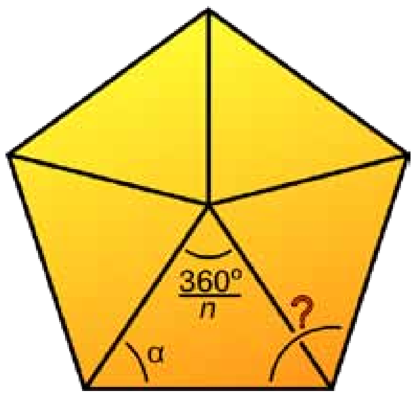
y deducir entonces que los ángulos internos del hexágono tienen 120º.

Nota: Dependiendo de las edades se les puede plantear como investigación personal, o en grupos, la demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180º.

1.4. El ejemplo del hexágono da la clave del caso general para calcular el ángulo interno de un polígono de n lados. Se divide el polígono en n triángulos isósceles iguales, con lo que es sencillo calcular el ángulo interno:

- Al dividir el polígono en triángulos desde el centro, tenemos n triángulos isósceles con un ángulo de 360º/n.
- Los otros dos ángulos son iguales, por lo tanto 180º = 2α + 360º/n. Obviamente el ángulo interno es el doble que α, luego

180º (n — 2)/n.

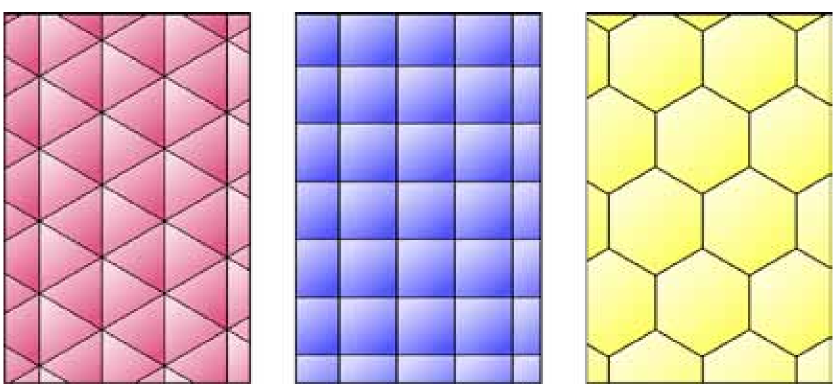


Barne-angelua

El ángulo interno

2. jarduera (baldosadura erregularrak):

Actividad 2 (Embaldosados regulares):



Hiru mosaiko erregular posibleak

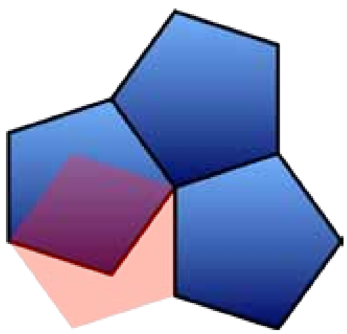
Los 3 posibles mosaicos regulares

2.1. Mosaikoei dagokienez, interesgarria da zoru bat estaltzeko lauzek izan ditzaketen forma posibleen gaia; bizitza errealeko adibideak bila ditzakegu (ezti-abaraskak, sukaldeak, etab.). Ziurrenik, proposatutako baldosadura ugari erregularrak izango dira, hau da, poligono erregular baten formako lauzekin eraikitakoak; lauza guztiak neurri berekoak izango dira, eta aldea aldearekin erantsita egongo dira. Aurreko jardueran alde berdineko poligono erregularren ereduak eraiki badira, zenbait baldosadura sor daitezke zoru hipotetiko baterako. Kasu erregularra kontsideratzen bada, ziur hiru modu posibleak aurkituko ditugula.

2.2. Esperimentua egin ondoren, ziurrenik jarduera egin duten pertsonek, hala nola, ikasleek, dagoeneko jakingo dute ezin dutela planoko mosaikorik eraiki pentagonoekin soilik. Interesgarria litzateke hori zergatik gertatzen den aztertzea (ikus irudia), eta gertakari hori beste poligono batzuentzat orokortzea. Beharrezkoa bada, heptagonoarekin zer gertatuko litzatekeen azter daiteke.

2.1. Una cuestión interesante en relación a los mosaicos es la de las posibles formas que pueden tener las losetas para embaldosar un suelo, pudiéndose buscar ejemplos en la vida real (panales de miel, cocinas, etc.). Probablemente, muchos de los embaldosados planteados sean regulares, es decir, construidos con losetas con la forma de un mismo polígono regular, todas ellas del mismo tamaño y pegadas lado con lado. Si se han construido modelos de polígonos regulares de lados iguales en la anterior actividad, se pueden intentar realizar diferentes embaldosados para un hipotético suelo. Si se considera el caso regular seguro que se obtendrán los 3 posibles.

2.2. Tras el intento experimental, es posible que las personas que estén realizando la actividad, por ejemplo estudiantes, ya sean conscientes de que no se pueden construir mosaicos del plano únicamente con pentágonos. Es interesante que busquen una razón para ello (véase la imagen anexa), y que generalicen este hecho a otros polígonos, preguntando, si es necesario, que ocurriría con el heptágono.



Pentagonoekin ez

Con pentágonos, no

2.3. Hurrengo jarduera oso interesgarria da hezkuntzaren ikuspegitik; aurreko gertakari hori formalki frogatu behar dutelako.

Hau da frogapena: Posible balitz planoa estaltzea aldeko poligonoren batekin, orduan erpin bakoitzaren inguruan poligono horien kopuru bat egongo litzateke. Beraz, 360º poligonoaren barne-angeluarekin zatitzen badugu, lortu behar dugu, poligono horien kopurua hain zuzen ere, hau da,

$$k = 2n/(n - 2).$$

zenbaki osoa izan dadin, -k 3, 4 edo 6 balioak har ditzake soilik.

2.4. Aurreko frogapenak ez du esan nahi n = 3, 4 edo 6 aldeko poligonoekin baldosadurak erai-

2.3. La siguiente actividad, y muy interesante a nivel educativo, sería la búsqueda de una prueba formal de este hecho.

La prueba es la siguiente: Si fuese posible cubrir el plano con copias de algún polígono de n lados, entonces alrededor de cada vértice habrá un cierto número de k de éstos polígonos. Por lo que al dividir 360º entre el ángulo interno del polígono se debe de obtener k, el número de estos polígonos, es decir,

$$k = 2n/(n - 2).$$

Para que k sea un número entero, n sólo puede tomar los valores 3, 4 ó 6.

2.4. La demostración anterior no implica que puedan construirse embaldosados con polígonos de ki daitezkeenik, existitzekotan horiek soilik izan daitezkeela baizik. Hala eta guztiz ere, badakigu existitzen direla, 2.1. jardueran esplizituki eraiki ditugulako. Hortik abiatuta, logikako zeharkako gaitasuna lan dezakegu: baldintza beharrezkoa baldintza nahikoaren kontra.

3. jarduera (baldosadura uniformeak): Behin baldosadura edo mosaiko erregularrak azaldu ditugunean, normala da geure buruari poligono erregular bat erabili beharrean alde kopuru ezberdineko poligono erregularrak erabiliko bagenitu zer gertatuko litzatekeen galdetzea (neurri bereko aldeak izango dituztenak, lauzak ongi itsatsi ahal izateko). Hau burutu ahal izateko baldintzaren bat gehitu beharko dugu:

3.1. Baldosadura uniformeekin lan egin dezakegu: erpin baten inguruan poligono erregularren konfigurazio bera dutenak dira. Oraingoan ere, aurretik eraikitako poligonoekin baldosadura uniformeen adibide praktikoak eraiki ditzakegu.

3.2. Interes handiena duten ikasleek zortzi baldosadura uniforme existitzen direla frogatzen saia daitezke. Mosaiko erregularrekin erabilitako prozeduraren antzekoa jarraitzen da, baina ez da guztiz berdina.

Hasteko, pentsa dezakegu erpin baten inguruan poligono erregular dauzkagula. Zenbaki hori 6ren berdina edo txikiagoa izango da, triangelua delako barne-angelu txikiena duen poligono erregularra. Bistakoa denez, 1 edo 2 ere ez da izango. Bestalde, bere barne-angeluen batura hau izango da:

$$360^\circ = 180^\circ\,((n_1 - 2)/n_1 + \cdots + (n_k - 2)/n_k).$$

Eragiketak eginez, honakora honetara iritsiko gara:

$$(k - 2)/2 = 1/n_1 + \cdots + 1/n_k.$$

-ri balio posibleak emanez (3, 4, 5 eta 6) eta lan eginez, ekuazio horrentzat 17 emaitza oso bila ditzakegu. Emaitza horietako batzuk zenbait modutan birrordena daitezke, eta 21 konfigurazio posible ezberdin lortuko ditugu (ikus irudia). Planoko baldosadurak ez dira motibo guzti hauekin sortzen: horiek aztertuz gero, irudiko zortzi mosaiko uniformeak aurkituko ditugu (aurretik ezagutzen ditugun erregularrak kontuan hartu gabe).

n = 3, 4 ó 6 lados, sino que, en caso de existir, son las únicas posibles. Sin embargo, se sabe que sí existen ya que se han construido explícitamente en 2.1. Con esto, se pueden trabajar competencias transversales de lógica: condición necesaria contra condición suficiente.

Actividad 3 (Embaldosados uniformes): Una vez introducidos los embaldosados o mosaicos regulares, es natural preguntarse qué ocurre si se permite no sólo un polígono regular, sino combinaciones de polígonos regulares de diferente número de lados (con los lados del mismo tamaño para que peguen bien las losetas). Será necesario añadir alguna condición.

3.1. Se podría trabajar con embaldosados uniformes: son aquellos en los que alrededor de un vértice se tiene la misma configuración de polígonos regulares. De nuevo pueden intentarse construir ejemplos prácticos de embaldosados uniformes con los polígonos anteriormente construidos.

3.2. Para alumnos y alumnas con más interés, podría trabajarse la demostración de que existen 8 embaldosados uniformes. El procedimiento es similar al hecho para los mosaicos regulares pero no enteramente igual.

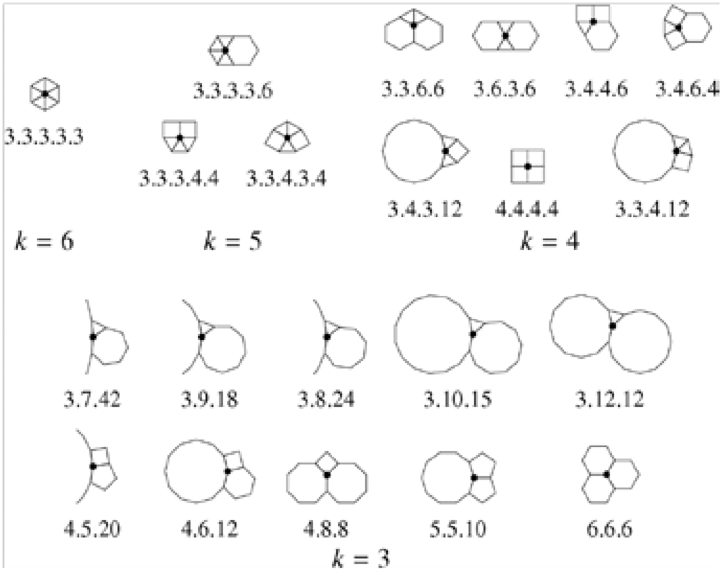
Para empezar puede suponerse que alrededor de un vértice se tienen k polígonos regulares. Este número ha de ser menor o igual que 6, ya que el polígono regular de menor ángulo interior es el triángulo. Obviamente, tampoco será 1 ni 2. Por otro lado la suma de sus ángulos internos será

$$360^\circ = 180^\circ\,((n_1 - 2)/n_1 + \cdots + (n_k - 2)/n_k).$$

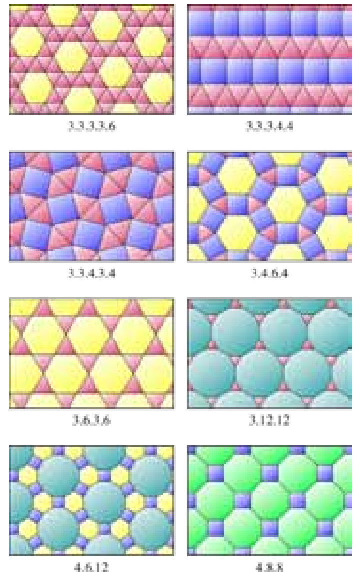
Operando se llega a

$$(k - 2)/2 = 1/n_1 + \cdots + 1/n_k.$$

Haciendo variar k entre sus posibles valores (3, 4, 5 y 6) y con cierto trabajo, se pueden encontrar 17 soluciones enteras de esta ecuación. Algunas de estas soluciones pueden reordenarse de varias maneras, obteniendo 21 posibles configuraciones (véase imagen adjunta). No todos estos motivos producen embaldosados del plano: por inspección podemos llegar a los 8 mosaicos uniformes de la imagen (obviando los ya conocidos regulares).



21 konfigurazioak


Las 21 configuraciones

4. jarduera (Mosaikoak sortzea Escher-en modura): Ikus bezala baldosadura ikusgarriak eraiki daitezke koloretako poligonoekin. Halere, Escher-en mosaikoak, edo antzeko beste batzuk, askoz ere erakargarriagoak dira. Mosaiko hauek modu errazean eraiki ditzakegu. Baldosadura erregular batekin hasiko gara. Gure aukeraren eta mosaikoan sartu nahi ditugun simetrien arabera, tresna batzuk edo beste batzuk erabiliko ditugu. Horrela, desitxuratutako aldeak kopiatzen direnean, talde kristalografiko batzuk edo beste batzuk lortuko ditugu amaierako mosaikoko simetria gisa.

4.1. Gelan lan egiteko, Escher-en lanak edo antzekoak aurkez ditzakegu, mosaiko periodikoekin egindakoak. Horien bidez, oinarrizko gunearen kontzeptua azalduko dugu; translazioaren bidez mosaiko osoa lortzeko aukera ematen duen paralelepipedo bat alegia. Gune hori ez da bakarra, eta aukeratutako translazioen araberakoa izango da. Interesgarria litzateke gune hori aurrez ikusitako mosaiko batzuetan adieraztea.

4.2. Mosaiko erregular bat aukeratuko dugu, karratuz osatutakoa adibidez, eta horren simetria guztiak identifikatuko ditugu. Honako hemen izan daitezkeen batzuk:

- 90º-ko, 180º-ko eta 270º-ko biraketak erpinetan eta karratuen zentroan.
- 180º-ko biraketak ertzetako erdiko puntuetan zentratuak.

Actividad 4 (Construcción de mosaicos a la Escher): Evidentemente se pueden construir embaldosados muy vistosos con polígonos coloreados. Claro que los mosaicos de Escher, u otros similares, resultan mucho más atractivos. Se pueden construir mosaicos de este tipo de manera sencilla. Se empieza con un embaldosado regular. Dependiendo de la elección y de las simetrías que se espera que tenga el mosaico se podrán utilizar diferentes herramientas. Así, según cómo se copien los lados deformados, se obtendrán unos grupos cristalográficos u otros como simetrías del mosaico final.

4.1. Para trabajar en un aula, sería interesante presentar al alumnado algunos trabajos de Escher o similares con mosaicos periódicos. Con estos se puede introducir la noción de región fundamental, un paralelepípedo que permite obtener todo el mosaico por traslación. Esta región no es única, y depende de las traslaciones que se elijan. Puede ser interesante presentar esta región en algunos de los mosaicos anteriores.

4.2. Se escogerá un mosaico regular, por ejemplo por cuadrados, y se identificarán todas sus simetrías, que pueden ser algunas de las siguientes:

- Giros de 90, 180 y 270 grados en vértices y en el centro de las losetas.
- Giros de 180º centradas en los puntos medios de las aristas.

- Islapenak, ardatzak mosaikoko lerroen gainean eta lauzen erditik pasatzen diren zuzenetan jarriak.
- Begibistako translazioak.
- Lerratze-simetriak: hasteko, translazio bat egiten da, eta, ondoren, islapen bat, ardatza translazio-norabidearen perpendikularrean jarrita.

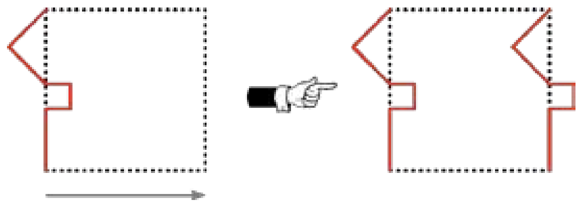
- Reflexiones con ejes sobre las líneas del mosaico y las rectas que pasan por el centro de las losetas.
- Las traslaciones obvias.
- Las simetrías con deslizamiento: primero se realiza una traslación y luego una reflexión con eje perpendicular a la dirección de traslación.

4.3. Simetria horietako batzuen bidez, planoa modu erakargarrian estaltzen duten lauzak lor ditzakegu. Oso erabilgarri izango dira karratuaren aldeak karratuaren aldeen gainera eramaten dituztenak.

4.3. Algunas de estas simetrías permitirán construir losetas que cubren el plano de manera más atractiva. Serán útiles aquellas que lleven lados del cuadrado sobre lados del cuadrado.

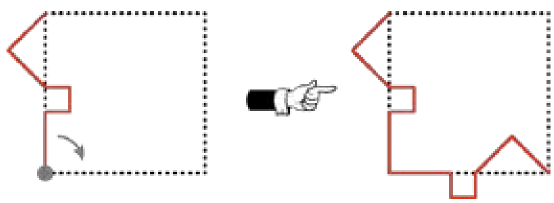
- Translazioa: nahikoa da alde bat aukeratzea, eta translazio baten bidez pareko aldean eranstea.

- Traslaciones: Basta seleccionar un lado y copiarlo en el lado de enfrente mediante una traslación.



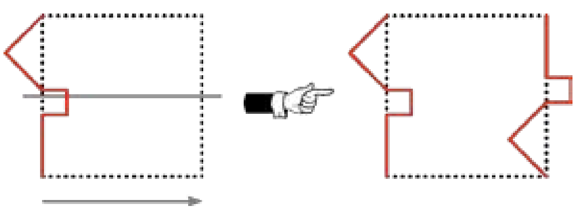
- Erpin baten inguruko 90º-ko biraketa: alde bat biratzen da, beste alde batera igortzeko moduan.

- Giros de 90º alrededor de un vértice: Se rota un lado, de manera que se envíe sobre otro.



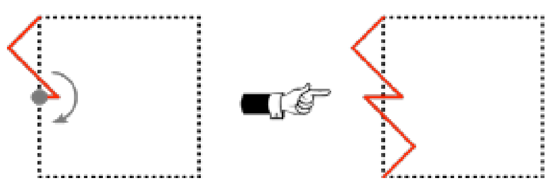
- Lerratze-islapena: islapenaren ardatzak “bi-koiztu” nahi dugun aldea gurutzatuko du, eta translazioak alde hori paralelo den beste alde batera eramango du.

- Reflexiones con deslizamiento: El eje de reflexión atraviesa el lado que se quiere “duplicar”, y la traslación lleva ese lado sobre otro paralelo.



- Alde baten erdiko puntuaren inguruko 180º-ko biraketa: mugimendu hauek ez dira horren interesgarriak.

- Giros de 180º alrededor del punto medio de un lado: Estos movimientos son algo menos interesantes.

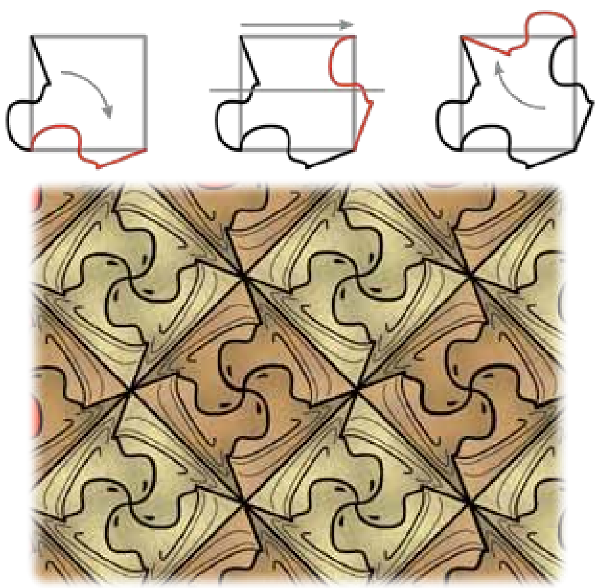


Simetria bat baino gehiago konbinatuz gero, bateragarriak izatea komeni da. Adibidez, translazio bat eta biraketa bat konbinatzen baditugu, biraketa-zentroaren translazioa ere biraketa-zentrua izan behar da.

Azkenik, behin lauza eraiki dugunean, berau errepikatuz mugimendu zurrun berak erabiliko ditugu planoa estali arte.

Hona hemen pausoz pauso eginiko adibide bat. Lehenik, 90º-ko biraketa bat erabiliko dugu alde beltza kopiatzeko (ikus irudiaren ezkerraldeko goiko aldeko irudia). Ondoren, alde hori erreplikatuko dugu berriro islapen-lerratu baten bidez, irudiaren erdialdeko goiko aldeko irudian ikusten den bezala. Alde bakarra estaltzea besterik ez da geratzen. Alabaina, biraketa-zentroaren islapen-lerratuak ezarriko du azkeneko aldeak zer forma eduki behar duen. Emaitza ikusi ahal izango dugu 1. irudiaren behealdean.

Bigarren irudian, bi translazioren bidez eraikitako adibide bat ikus dezakegu. Ikus dezakezuenez, lauza ez da ixten, aukeratutako aldeak ez direlako erpinen gainean bukatzen. Hala ere, erraza da benetako mosaiko bat eraikitzea.



1. irudia. Mosaikoaren adibide bat
Figura 1. Un ejemplo de mosaico

Dagoeneko, jarduera gauzatzen ari diren ikasleak Escher-en erara eraikitako mosaikoak egiteko gai izango dira.

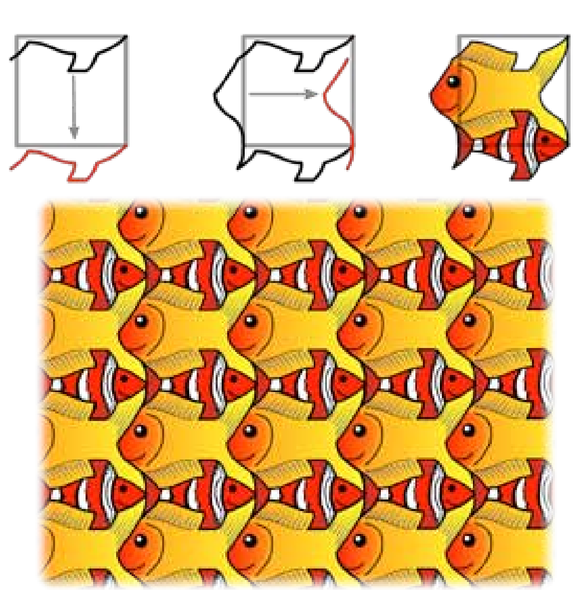
4.4. Triangeluz eta hexagonoz osatutako mosaikoetan zer mugimendu (mugimendu baliokideak dira)

Si se combinan varias simetrías, es conveniente que estas sean compatibles, por ejemplo, si se combina una traslación y un giro, el trasladado del centro de giro debería ser también un centro de giro.

Por último, una vez construida la loseta, se utilizan los mismos movimientos rígidos para replicarla hasta cubrir el plano.

Un ejemplo paso a paso. En primer lugar se usa un giro de 90º para replicar el lado negro (véase la figura superior izquierda de la imagen anexa). Después, se replica de nuevo este lado mediante una reflexión con deslizamiento como en la figura superior central de la imagen. Sólo resta cubrir un lado. Ahora bien, la imagen por la reflexión por deslizamiento del centro de giro también lo será. Esto fuerza la forma del último lado. Puede verse el resultado en la ilustración inferior de la figura 1.

Puede verse también en la figura 2 un ejemplo construido mediante dos traslaciones. Obsérvese que la loseta no se cierra, esto se debe a que los lados elegidos no terminan sobre los vértices. Aún así, es sencillo construir un verdadero mosaico.



2. irudia. Mosaikoaren beste adibide bat.
Figura 2. Otro ejemplo de mosaico.

Y en este momento los y las estudiantes que estén realizando la actividad ya estarían en condiciones para crear sus propios mosaicos a la Escher.

4.4 Podría plantearse ahora una investigación, qué movimientos se podrían hacer en el caso de los moegin ahal diren inguruko ikerketa proposa daiteke. Lauza bakarreko mosaikoak, poligono erregularra izan gabe, ere landu ditzakegu.

saicos por triángulos o hexágonos (los movimientos son análogos). Incluso, podría trabajarse con mosaicos de una sola loseta que no sea un polígono regular.

VI. Moebius-en banda ez da orientagarria

Paper-xafla luze bat hartzen badugu, eta bi muturrak itsasten baditugu irudian ikusten den eran, zilindro bat lortuko dugu, hau da, bi alde dituen gainazal bat (barneko aurpegia eta kanpokoa), eta ertz gisa bi “zirkunferentzia” disjuntu dituena.

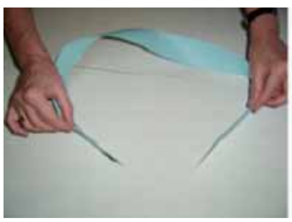
VI. La banda de Moebius no es orientable

Si se toma una tira de papel y se pegan los extremos como muestra la figura se obtiene un cilindro, es decir, una superficie que tiene dos lados (la cara interior y la exterior) y dos “circunferencias” disjuntas como bordes.



Bi muturrak itsatsi baino lehen, muturretako bat 180º biratzen badugu , Moebius-en banda lortuko dugu. Ertz bakarra duena (bere luzera zilindroaren ertzak osatzen duten bi zirkunferentzien neurriaren batura izango dena), eta aurpegi bakar duena.

Si antes de pegar los extremos se gira uno de ellos 180 grados, el objeto que se obtiene es una banda de Moebius, que posee un único borde (cuya longitud es la suma de la medida de las dos circunferencias que forman el borde del cilindro) y una única cara.




Izan ere, nahikoa da arkatz markatzaile bat hartzea eta bide osoa markatzea gainazalean zehar jatorriko puntura heldu arte; orduan, ikusiko dugu Moebius-en banda OSOA pasa dugula, objektuaren “balizko” bi aurpegiak markatuta baitaude; beraz, objektuak alde bakar bat dauka. Objektu honen ertza beste arkatz markatzaile batekin (edo berarekin) pasatzen badugu, jatorrizko puntura heltzean ikusiko dugu guztia koloreztatuta dagoela; beraz, Moebius-en bandak ertz bakar bat dauka.

Are gehiago, paper-xafla luze baten bi muturrak itsasten baditugu aurrez 180º-ren multiplo pare batez biratuz, zilindro bat lortuko dugu, eta, kontrako kasuan, Moebius-en banda bat. Ikasleei gertaera hau nola egiaztatu daitekeen galdetu daiteke... ertzak eta aurpegiak zenbatuz.

En efecto, basta con tomar un rotulador y marcar un camino a lo largo de la superficie hasta llegar al punto de partida; en este momento, se comprueba que se ha recorrido TODA la banda de Moebius, al estar las “supuestas” dos caras del objeto marcadas, es decir, este objeto tiene un único lado. Si se recorre con otro rotulador (o el mismo) el borde de este objeto, se observa que al regresar al punto de partida todo está coloreado, es decir, la banda de Moebius tiene un único borde.

De hecho, si se pegan los dos extremos de una tira de papel girándola previamente un múltiplo par de 180 grados, se obtiene un cilindro y una banda de Moebius en caso contrario. Preguntar a los y las estudiantes cómo puede comprobarse este hecho... contando bordes y caras.

Ikasleei horrek oso ezaguna den zerbait gogorarazten dien galde diezaiekegu. Hain zuzen ere, birziklatzearen sinboloa –Gary Andersonek 1970ean sortua– triangelu baten ertzen gainean elkar jarraitzen duten hiru gezik osatzen dute : hondakinak baliabide erabilgarri bihurtzeko prozesua irudikatzen duen objektua, Moebius-en banda bat da.

Se les puede preguntar a los y las estudiantes si les suena a algo muy conocido. El símbolo del reciclaje –creado por Gary Anderson en 1970 y que se ilustra en la página anterior– consiste precisamente en tres flechas que se persiguen sobre las aristas de un triángulo: es una banda de Moebius que representa el proceso de transformación del material de deshecho en recursos útiles.

1. jarduera: Moebius-en banda ez orientagarria da, hau da, horren gainean bidaiatzen duten elementuen noranzkoa aldatzen du: adibidez, gezi bat marrazten badugu bandaren gainean, eta horren aurpegi bakarrean zehar mugitzen bada... ikusiko dugu hasierako puntura heltzean, geziak noranzkoa aldatu duela!

Actividad 1: La banda de Möbius es no orientable, es decir, invierte el sentido de los objetos que viajan sobre ella: si se dibuja por ejemplo una flecha sobre la banda, y se mueve a lo largo de su única cara... se observará que cuando se regresa al punto de partida, ¡la flecha ha cambiado de sentido!

2. jarduera: Paperezko zilindro bat erditik mozten badugu, bi “zilindrotxo” lortuko ditugu, jatorrizko zilindroaren luzera bera izango dutenak, baina horren altueraren erdia.

Actividad 2: Al cortar por la mitad un cilindro de papel, se obtienen dos “cilindritos”, de la misma longitud que el cilindro original pero la mitad de altos que este.




Gauza bera egiten badugu Moebius-en banda batekin, zer gertatzen da? Hasteko, ikus dezakegu “banda” bakar bat lortuko dugula, jatorrizko Moebius-en bandaren luzeraren bikoitza izango duena, eta altuera erdia. Lortutakoa Moebius-en banda bat edo zilindro bat den galde dezakegu. Horri erantzuteko, arkatz markatzaile bat hartu, eta aurpegi-eta ertz-kopurua zenbatuko dugu. Bi kasuetan, emaitza bi izango da; beraz, banda normal bat da, bihurritutakoa.

Zilindro bat horren herenetik ebakiz gero, luzera bereko bi zilindro lortuko ditugu, baina altuera desberdina izango dute; batak, jatorrizko zilindroaren altueraren herenekoa, eta besteak, berriz, jatorrizkoaren bi herenetakoa. Gauza bera egiten badugu Moebius-en banda batekin, Moebius-en banda bat (jatorrizkoa bezain luzea, eta zabaleran herena) eta zilindro bat (luzeran bikoitza eta zabaleran herena) lortuko ditugu, elkarri lotuta egongo direnak.

Si se hace lo mismo con la banda de Moebius, ¿qué sucede? En primer lugar se observa que es una única “banda” doble de larga que la banda de Moebius original pero de la mitad de altura. Se puede preguntar a los estudiantes si el resultado es una banda de Moebius o un cilindro. Para responder, se toma un rotulador y se cuenta el número de caras y de bordes, que será dos en ambos casos, por lo tanto es una banda normal retorcida.

Al cortar por su tercera parte un cilindro, se obtienen dos cilindros igual de largos, de distintas alturas, exactamente un tercio y dos tercios de la original. Si se hace lo mismo con la banda de Moebius, resultan una banda de Moebius (igual de larga y un tercio de ancha) y un cilindro (el doble de largo y un tercio de ancho) y enlazados.

3. jarduera: Magian, trikimailu ugari egin daitezke Moebius-en bandarekin; Afghan Band deitzen zaie trikimailu hauei. Adibidez, hiru paper-xafla luze moztu ditzakegu, eta horien muturretan A eta B (zuria), C eta D (urdina) eta E eta F (krema) hizkiak jarri. Hirurak itsatsiko ditugu, bata bestearen gainean, baina aldeetako bat 180 gradu biratuko dugu horiek itsatsi aurretik, hau da, A F-rekin, B E-rekin eta C D-rekin itsatsiko ditugu... zer gertatzen da? Zilindro bat lortzen da, muturretako bandez osatutakoa, eta erdiko Moebius-en banda mantendu egiten da... magia al da?

Actividad 3: En Magia, existen numerosos trucos con la banda de Moebius, denominados Afghan Band. Por ejemplo, si se cortan tres tiras de papel que se marcan con las letras A y B (blanca), C y D (azul) y E y F (crema) en su extremos. Se pegan las tres una sobre otra, girando uno de los lados 180 grados antes de pegarlas, es decir, se pegan A con F, B con E y C con D... ¿qué sucede? Se obtiene un cilindro formado por las bandas de los extremos y la banda de Moebius central se conserva... ¿es magia?

4. jarduera: Hona hemen adibidez San Valentin egunean egin daitekeen trikimailu dibertigarri bat (http://threesixty360.wordpress.com/). Bi paper-xafla luze moztu behar ditugu (hobe kolore gorrikoak badira), eta bi Moebius-en banda eraikiko ditugu horiekin. Oso garrantzitsua da –bihotzak elkarri lotuta gera daitezen–, banda bat osatzerakoan erlojuaren orratzen norazkoan biratzea muturretako bat, eta bestea, berriz, kontrako noranzkoan. Bi Moebius-en bandak itsatsiko ditugu; baten topagunea bestearenarekiko perpendikularrean gelditu behar da.

Actividad 4: Un truco divertido para realizar por ejemplo el día de San Valentín (http://threesixty360.wordpress.com/): se cortan dos tiras de papel (mejor de color rojo) y se construyen con ellas dos bandas de Moebius. Es muy importante –para que los corazones queden enlazados– obtener una de las bandas girando uno de los extremos en la dirección de las agujas del reloj y la otra haciéndolo en sentido contrario. Se pegan las dos bandas de Moebius de manera que en el punto de encuentro de una quede perpendicular con respecto a la otra.

Bi bandak ebakiko ditugu luzetara, beheko irudian adierazten den eran. Azpimarratu behar da lau zatitan moztuko dela bi bandak lotzen dituen ka-

Córtense las dos bandas en sentido longitudinal, como se indica en la imagen. Hay que destacar que el cuadrado superpuesto por el que están unidas rratu gainjarria. Jarraibide guztiak bete baditugu, elkarri lotutako bi bihotz lortuko ditugu!

ambas bandas se cortará en cuatro partes. Si se ha hecho todo siguiendo las instrucciones, ¡se conseguirán dos corazones enlazados!

VII. Fraktalak eraikitzea paperarekin

Geometria fraktala matematiketako adaretako bat da, eta Benoît Mandelbrot-ek (1924-2010) sortu zuen duela 50 urte baino gutxiago. 1967an, Mandelbrot-ek "Zer luzera dauka Britainia Handiko kostak?" izeneko artikulu bat idatzi zuen. Bertan, oso irregular diren objektuentzat (mugak adibidez) luzeraren kontzeptuak zentzurik ez daukala azaldu zuen. Era berean, adierazi zuen geometria euklidestarra ez zela egokiena gure inguruko natura deskribatzeko, izan ere, berak esan bezala "Hodeiak ez dira esferak, mendiak ez dira konoak, kosta-lerroak ez dira zirkuluak eta azala ez da leuna; izpiek ere ez dute lerro zuzenean bidaiatzen".

XIX. mendearen amaieran eta XX. mendearen hasieran matematikari handien, (Riemann, Cantor, Peano, Hilbert edo Hausdorff) eskutik sortu ziren "objektu fraktalak" objektu patologikotzat jo ziren. Mandelbrotek sortu zuen fraktal terminoa (latineko "fractus"-etik: irregularra) objektu horiei erreferentzia egiteko; eta, gainera, horien ezaugarri batzuk ezarri zituen:

- Autoantzekotasuna: objektu fraktal baten zati bat behar adina handiagotzen bada, horren erreplika bat lortzen da. Objektuaren beraren kopia txikiz osatutako elementu bat dela pentsa dezakegu.
- Dimentsio ez osoa duten irudiak (dimentsio "fraktala"): Geometria klasikoko objektuak lauak dira, zimurrik gabeak, eta, beraz, horien dimentsioa zenbaki arrunt bat da (zuzenek eta kurbek 1 dimentsioa dute, gainazalek 2 dimentsioa, etab.). Fraktalak, berriz, objektu geometriko zimurrak dira, irregulartasun handiak dituztenak, beraz horien "dimentsio fraktala" zenbaki arrazional bat da (kurba fraktalen dimentsioa 1 eta 2 artekoa da, gainazal fraktalena 2 eta 3 artekoa, eta horrela ondoz ondo).
- Prozesu geometriko iteratibo, edo analitiko, infinituen ondoren agertzen diren multzoak dira.

VII. Construcción de fractales con papel

La geometría fractal es una rama de las matemáticas creada hace menos de 50 años por Benoît Mandelbrot (1924-2010). En 1967, Mandelbrot escribió un artículo titulado "¿Cuán larga es la costa de Gran Bretaña?" donde describió que la noción de longitud carece de significado para objetos tan irregulares como las fronteras. De igual manera, defendía que la geometría euclídea no era la más correcta para la descripción de la naturaleza que nos rodea, pues "Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son círculos y la corteza no es suave, ni los rayos viajan en línea recta."

Los "objetos fractales" surgen a finales del siglo XIX y principios del XX, de la mano de grandes matemáticos como Riemann, Cantor, Peano, Hilbert o Hausdorff, entre otros, y se consideraban como objetos patológicos. Fue Mandelbrot quien acuñó el termino fractal (del latín "fractus": irregular) para referirse a estos objetos y además estableció ciertas propiedades que los caracterizaban:

- Autosemejanza: Si se magnifica convenientemente una parte cualquiera de un objeto fractal se obtiene una réplica del mismo. También puede pensarse como formado por copias de sí mismo a escalas más pequeñas.
- Figuras con dimensión no entera (dimensión "fractal"). Los objetos de la geometría clásica son lisos, sin rugosidad, y por lo tanto su dimensión es un número natural (las rectas y curvas tienen dimensión 1, las superficies tienen dimensión 2, etc.), mientras que los fractales son objetos geométricos rugosos, de una gran irregularidad, y su "dimensión fractal" es un número no natural (curvas fractales dimensión entre 1 y 2, superficies fractales entre 2 y 3, y así sucesivamente).
- Conjuntos que aparecen tras procesos iterativos geométricos, o analíticos, infinitos.

1. jarduera: Existitzen al da objektu fraktalik naturan?

Ikasleei naturako objektu fraktalik ezagutzen duten galde daiteke. Aipatzen dituzten guztiak sailka ditzatela fraktal autoantzekoetan eta ez-autoantzekoetan.

Actividad 1: ¿Existen objetos fractales en la naturaleza?

Pregúntese a los alumnos y alumnas si conocen objetos fractales en la naturaleza. Y que todos los que se mencionen, los clasifiquen en las categorías de fractales autosemejantes y no autosemejantes.

Naturan aurki ditzakegun fraktalen adibideak. Lehenengo lerroa, ezkerretik eskuinera: iratze-adar bat, ekaitz-tximista bat, ibai-adar bat. Bigarren lerroa ezkerretik eskuinera: nautilus baten oskolaren ebakidura, brokoli-sorta bat, romanesku-landare bat.

Ejemplos de fractales que se encuentran en la naturaleza: primera fila de izquierda a derecha: rama de un helecho, rayo de una tormenta, ramificación de un río; segunda fila de izquierda a derecha: sección de la concha de un nautilus, un ramillete de brócoli, una planta de romanescu.

2. jarduera: Lauki zentralak

Jarduera hau gauzatzeko, orri normal bat beharko dugu. Ahal bada, orriaren zabalera luzeraren bikoitza izango da.

Orria erditik tolestuko dugu, eta ondo markatuko dugu tolesdura bi noranzkoetan.

Bi ebaketa egingo ditugu tolestu dugun tokitik, bakoitza orriaren ertzetik laurden batera, jatorrizkoaren luzeraren erdira arte.

Ebaki dugun pieza kontrako muturreraino tolestu, eta ongi markatuko dugu.

Moztutako zatia barrurantz tolestuko dugu.

Prozesua errepikatuko dugu. Orain ebaketak egingo ditugu, bakoitza tolesduraren hasieratik laurden batera, eta geratzen den paperaren luzeraren erdira arte.

Ebaki dugun pieza tolestuko eta markatuko dugu, berriz ere barrurantz tolesteko.

Prozesua berriz errepikatuko dugu.

Actividad 2: Cuadrados centrales

Para la realización de esta actividad se necesita un folio cualquiera. Es preferible que las proporciones del folio sean 1 a 2, es decir, que mida el doble de ancho que de alto.

Se comienza con un folio y se dobla por la mitad, procurando marcar bien el doblez en los dos sentidos.

Se hacen dos cortes por donde se ha doblado, cada uno a ¼ del borde de la hoja, de longitud la mitad del original.

Se dobla y se marca bien la pieza que se ha recortado hasta el extremo contrario.

Se dobla y se pliega la parte recortada hacia adentro.

Se repite el proceso. Ahora se hacen los cortes, dada uno a ¼ del comienzo del pliegue y de longitud la mitad del papel que queda.

Se dobla y se marca la pieza que se ha recortado para plegarla de nuevo hacia adentro.

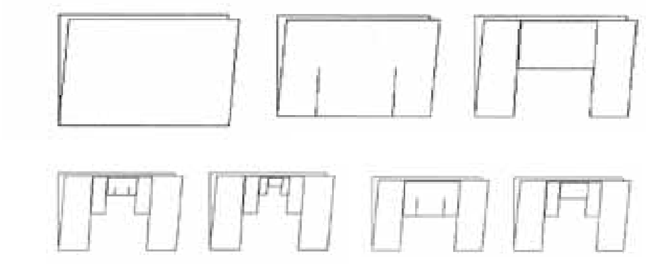
Se repite de nuevo el proceso.

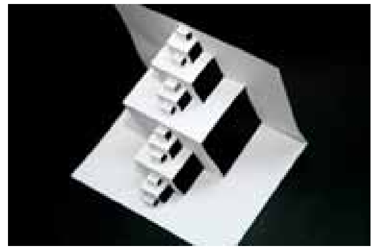
Hiru iterazio (tolesdurak) egiterakoan zaildu egiten da eskuz egitea, tolesduraren lodiera handiagotzen doalako.

Azkenik, guztia destolestuko dugu, eta angelu zuzenak osatu; fraktal motako objektu eder bat sortu dugula ikusiko dugu.

Al realizar tres iteraciones (dobleces) comienza a ser complicado hacerlo manualmente, pues el espesor de las dobleces va aumentando mucho.

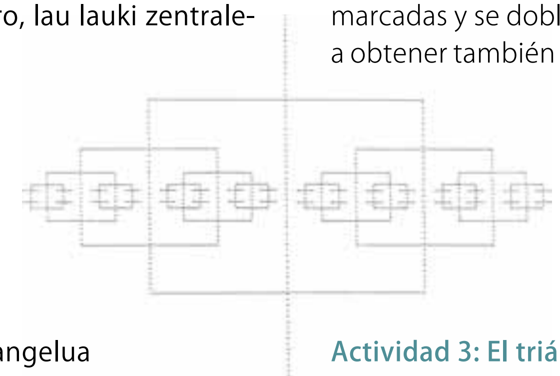
Ya por último se desdobla todo formando ángulos rectos y se puede apreciar la belleza del objeto de tipo fractal realizado.





Oharra: praktikan, ezinezkoa da hirugarren tolesdura planoa behar bezala marraztea eta ebakitzea. Hori errazteko, jarraian txantiloi bat daukagu; markatutako lerro jarraikietatik ebakiz gero, eta puntu-lerroetatik tolestuz gero, lau lauki zentraletako fraktala lortuko dugu.

Nota: en la práctica, es imposible dibujar correctamente y cortar después del tercer plegado plano. Por ello, a continuación se adjunta una plantilla mediante la cual, si se corta por las líneas continuas marcadas y se dobla por las líneas a puntos, se llega a obtener también el fractal de cuadrados centrales.



3. jarduera: Sierpinski-ren triangelua

Jarduera hau gauzatzeko, orri normal bat beharko dugu. Ahal bada, orriaren zabalera luzeraren bikoitza izango da.

Hasteko, orria tolestuko dugu.

Tolestu dugun tokitik, erdia markatuko dugu, eta paperaren luzeraren erdia ebakiko.

Ebaki dugun bi zatietako bat tolestuko dugu kontrako muturrera arte.

Bi noranzkoetan ongi markatzea komeni da, horrela nabarmen murriztuko baita orriaren bi aurpegien arteko airea, eta, beraz, baita amaierako lodiera ere.

Tolesdurari buelta emango diogu barrurantz.

Prozesua errepikatuko dugu; zati bakoitzaren erdia markatuko dugu, eta aurreko ebakiduraren erdira arte ebakiko.

Actividad 3: El triángulo de Sierpinski

Para la realización de esta actividad se necesita un folio cualquiera. Es preferible que las proporciones del folio sean 1 a 2, es decir, que mida el doble de ancho que de alto.

Se empieza con el folio y se dobla.

Se marca la mitad del lado por donde se ha doblado y se corta la mitad de la largura del papel.

Se dobla una de las dos partes que se ha cortado hasta el extremo contrario.

Es conveniente marcar bien en los dos sentidos, pues esto reduce considerablemente el aire entre las dos caras de la hoja, y por tanto el espesor final.

Se da la vuelta al pliegue hacia adentro.

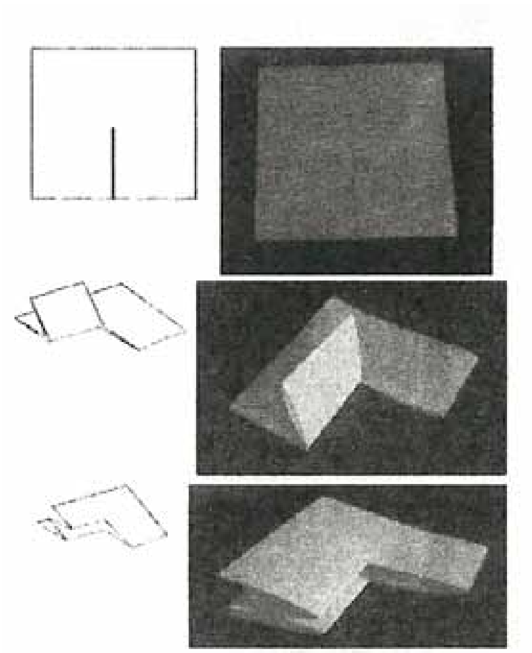
Se repite el proceso, se marca la mitad de cada una de las partes y se corta hasta la mitad del corte anterior.

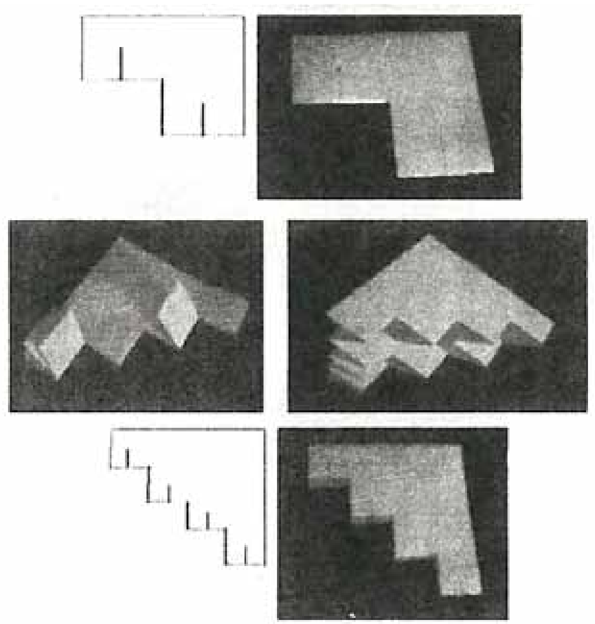
Orain lau zati dauzkagu. Lehenengoa eta hirugarrena tolestuko ditugu kontrako muturreraino. Eta, berriz ere, buelta emango diegu tolesdurei.

Zati horizontal bakoitzaren erdia markatuko dugu, eta luzeraren erdira arte ebaki. 1, 3, 5 eta 7 zatiak tolestuko ditugu. Azkenik, berriz ere buelta emango diegu tolesdurei.

Ahora hay 4 partes. Se dobla la primera y la tercera hasta el extremo contrario. Y se da la vuelta a los pliegues de nuevo.

Se marca la mitad de cada una de las partes horizontales y se corta la mitad de la longitud. Se doblan las partes 1, 3, 5 y 7. Finalmente se vuelve a dar la vuelta a los pliegues.



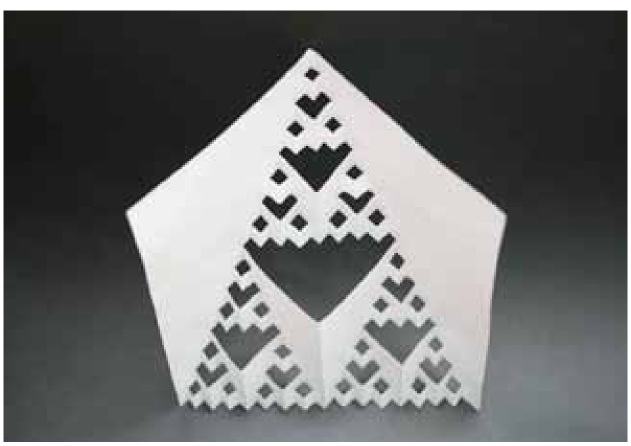


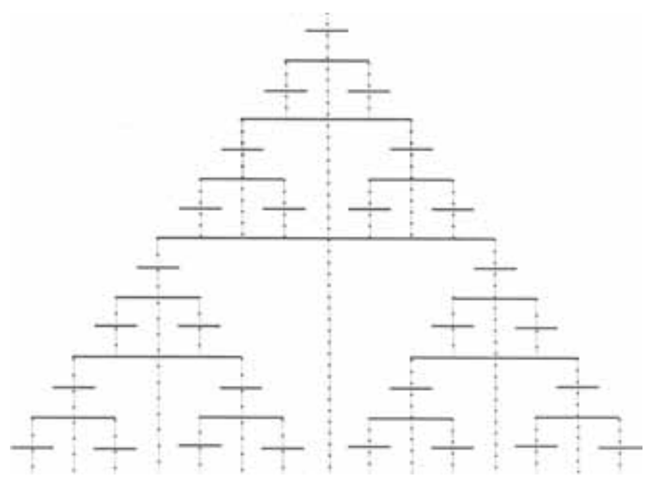
Bukatzeko, guztia destolestuko dugu, eta “Sierpinski-ren triengelua” delakoa lortuko dugu.

Oharra: praktikan, ezinezkoa da hirugarren tolesdura planoa behar bezala marraztea eta ebakitzea. Hori errazteko, jarraian txantiloi bat daukagu; markatutako lerro jarraikietatik ebakiz gero, eta puntu-lerroetatik tolestuz gero, Sierpinski-ren triangelu bat lortuko dugu.

Para acabar, se desdobla todo y se obtiene lo que se conoce como “El triángulo de Sierpinski”.

Nota: En la práctica, es imposible dibujar correctamente y cortar después del tercer plegado plano. Por ello, a continuación se adjunta una plantilla mediante la cual, si se corta por las líneas continuas marcadas y se dobla por las líneas de puntos, se obtiene un Triángulo de Sierpinski.





Begirada matematiko bat • Una mirada matemática

IMAGINARY

www.ehu.es/imaginary